

21世纪高等学校新理念教材建设工程

线性代数和概率统计思维训练与解题方法

石月岩　徐洪香
刘秀娟　徐美进　编著



東北大學出版社
Northeastern University Press



21世纪高等学校新理念教材建设工程

CAD技术基础教程
现代海关通关实务
经济法学概论
形势与政策
广告文化学
公共关系学
汽车检测与诊断技术
汽车造型设计
模糊数学及其应用
计算机在材料科学与工程中的应用
计算机绘图
质量管理与认证
财务管理学
车辆随机振动
非艺术类普通高等学校音乐欣赏
结构优化设计
大学物理实验
建筑设计
现代企业管理
网络广告设计实务
电视摄像简明教程
机械工程材料
金工实训教程
大学计算机基础实验教程
材料科学与工程专业实验教程
机械基础实验教程
电工电子技术实验教程
线性代数和概率统计思维训练与解题方法

ISBN 978-7-5517-0611-7



定价：21.00元



21 世纪高等学校新理念教材建设工程

线性代数和概率统计思维训练与解题方法

石月岩　徐洪香
刘秀娟　徐美进　编著

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数和概率统计思维训练与解题方法 / 石月岩等编著. 一沈阳 ： 东北大学出版社，2014.6

（21 世纪高等学校新理念教材建设工程）

ISBN 978-7-5517-0611-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①石… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 ②概率论—高等学校—教学参考资料 ③数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 129195 号

内 容 提 要

本书根据“线性代数”“概率统计”课程中的教学重点和学生学习中的难点问题，归纳成专题，对其解决的方法、思路和解题步骤进行归纳总结，并精选了部分典型例题进行分析，使读者对解决此类问题的方法和技巧得到训练，以达到融会贯通之效.

本书读者对象为高等院校工科、经济类等专业的大学生和教师，也可作为报考硕士研究生考生的参考用书.

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph@ neupress. com
http：//www. neupress. com
印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm × 260mm
印　　张：11
字　　数：268 千字
出版时间：2014 年 6 月第 1 版
印刷时间：2014 年 6 月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义
责任校对：叶　子
封面设计：刘江旸
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-0611-7　　　　定　价：21.00 元

前　言

“线性代数”“概率统计”是高等工科院校普遍开设的两门重要基础理论课，也是工学、经济学专业硕士研究生入学考试中的必考课程. 这两门课程具有学时少、内容多、理论性强、难度大、解题技巧灵活等特点，也是衡量学生数学水平的重要标志. 学好这两门课程，能使学生的逻辑思维和推理能力得到训练，分析和解决问题的能力得到提高，解题技巧和计算水平得到加强，并掌握处理离散量和随机量的基本方法，为后续课程的学习奠定扎实的数学基础.

作为长期从事线性代数、概率统计课程教学的教师，在教学过程中，我们一直在思考和探索如何面对浩如烟海的各种习题、各种抽象的定义等问题，能给学生一种数学思维训练方法、一种启迪、一种解题思路，使他们能做到主动学习，并能掌握住所学基本概念、基本原理和解题方法的内涵与精髓，从而在各类考试中得心应手、应对自如.

为了实现这个目标，我们在多年教学研究和总结的基础上，把教学重点和学生在学习中所遇到的难点问题归纳成一些专题，对其解决的方法思路和解题步骤进行归纳总结，并深刻解析所涉及的概念和理论，借以澄清学生的模糊认识，排除思维障碍，加深对基本概念、定理的理解及解题方法的正确把握，达到培养数学思维，提高分析问题、解决问题和计算能力的目的. 为此我们编写了本书，希望能起到抛砖引玉的作用.

本书共分两个部分：线性代数部分，概率统计部分. 每部分内容以课程中的主要问题与难点问题作为专题进行讨论，每个专题分两个部分.

(1) 解题方法：对本专题所涉及的基本概念、基本理论、主要解题方法和步骤加以归纳和总结，使读者能对本部分专题的解决有个系统的了解和掌握.

(2) 典型题解析：本部分精选了线性代数、概率统计中具有代表性的部分典型例题，通过对典型例题的解析，使读者掌握解决此类问题的方法和技巧，以达到举一反三、融会贯通的目的.

本书在编写过程中，辽宁工业大学佟绍成教授、李树有教授、王贺元教授提出了许多好的建议，并做了大量的工作；同时，辽宁工业大学理学院的领导和工程数学教研室的同仁也给予了大力支持与帮助. 谨在此一并表示衷心的感谢. 另外，还要感谢辽宁工业大学教材出版基金对本书的资助.

限于编者水平，加之编写时间仓促，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 11 月

目 录

第一部分 线性代数 …… 1

1 行列式与方阵行列式的计算方法 …… 1
2 伴随矩阵的性质及应用 …… 8
3 矩阵可逆的判定与逆矩阵的求法 …… 10
4 方阵的高次幂的求法 …… 14
5 矩阵方程的解法 …… 18
6 初等矩阵的应用 …… 22
7 矩阵秩的求法 …… 25
8 向量组线性相关性的证明方法 …… 29
9 向量组的最大无关组的求法 …… 35
10 齐次线性方程组基础解系的判定与求法 …… 38
11 齐次线性方程组通解的求法 …… 41
12 非齐次线性方程组有解的判定及通解的求法 …… 48
13 两个线性方程组有公共解的判定及求法 …… 56
14 矩阵的特征值与特征向量的求法 …… 60
15 方阵可相似对角化的条件与对角化方法 …… 66
16 实对称矩阵正交相似对角化的方法 …… 70
17 用正交变换化二次型为标准形的方法 …… 74
18 合同矩阵与二次型正定性的判别方法 …… 80

第二部分 概率统计 …… 85

19 随机事件的关系与抽象事件的概率计算 …… 85
20 古典概型与几何概型中随机事件概率的计算方法 …… 88
21 条件概率的计算与乘法定理的应用 …… 93
22 利用全概率公式与贝叶斯公式计算随机事件概率的方法 …… 96
23 相互独立的随机事件概率的计算 …… 99
24 一维离散型随机变量的分布律或分布函数的判定与求法 …… 103
25 一维连续型随机变量的概率密度或分布函数的判定与求法 …… 107
26 几个常用随机变量的概率分布 …… 110
27 一维随机变量函数的分布的求法 …… 114
28 二维离散型随机变量的分布律的求法 …… 119
29 二维连续型随机变量的概率密度或分布函数的求法 …… 123
30 边缘分布的求法与随机变量独立性的判别 …… 126
31 条件分布的求法 …… 133
32 相互独立的正态随机变量的线性组合的分布 …… 137
33 随机变量及随机变量函数的数学期望与方差的求法 …… 139
34 两个随机变量的协方差与相关系数的求法 …… 146
35 中心极限定理的应用 …… 150
36 正态总体的一些常用抽样分布 …… 153
37 矩估计法与最大似然估计法 …… 159
38 单个正态总体均值与方差的置信区间 …… 164
39 估计量的评选标准 …… 166
40 假设检验 …… 169

第一部分　线性代数

1　行列式与方阵行列式的计算方法

1.1　解题方法

行列式是线性代数中的重要工具，在求解线性方程组、求逆矩阵、判别向量组的线性相关性、求矩阵的特征值、判别二次型的正定性等方面都有重要应用. 计算行列式，最重要的就是仔细观察其结构特点，再选择适当的方法来计算，就是要做到“一看二想三做”. 通常采用的方法有：

（1）对于二阶与三阶行列式,可以用对角线法则；

（2）对于特殊的行列式,可利用行列式的定义去求；

（3）利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式去计算；

（4）利用行列式按行（列）展开法则计算行列式（即降阶）；

（5）利用数学归纳法计算 n 阶行列式；

（6）利用范德蒙行列式的结论计算特殊的行列式.

对于方阵的行列式的计算，常常需要利用到矩阵的运算性质以及方阵行列式的性质与相关结论，如：$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$，$|\lambda A|=\lambda^n|A|$，$|AB|=|A||B|$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}$，$|A^*|=|A|^{n-1}$等.

1.2　典型题解析

【例 1-1】 设 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为________.

分析　本题是求第四行各元素余子式之和，而不是求第四行各元素的代数余子式之和，这是有差别的. 一种方法是直接计算，分别算出四个余子式，再求和；另一种方法是将其转化为代数余子式，并逆向应用行列式展开定理将其归结为一个四阶行列式，再采用“先化简，后降阶”的方法进行计算. 本题显然利用后一种方法比较简单.

先将 D 的第四行元素换成 $-1, 1, -1, 1$，得 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，则新行列式的第四行元素的余子式和原行列式第四行元素的余子式是相同的. 于是

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-7)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7\times\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=7\times4\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-28\times1=-28.$$

解 应填 -28.

【例 1-2】 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，则 $8A_{41}+27A_{42}+64A_{43}+125A_{44}=$ ________.

分析 本题是逆向应用行列式按行展开定理及范德蒙行列式的结论计算的题型.

$$8A_{41}+27A_{42}+64A_{43}+125A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

$$=(5-2)\times(5-3)\times(5-4)\times(4-2)\times(4-3)\times(3-2)=3\times2\times1\times2\times1\times1=12.$$

解 应填 12.

【例 1-3】 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为________.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

分析 本题应首先将行列式计算出来，由此便可得知方程 $f(x)=0$ 的次数，进而可确定根的个数. 利用行列式的性质，把行列式的第一列的 -1 倍依次加到第二、第三、第四列上，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=-x(-5x+5)=5x(x-1).$$

显然，$f(x)=0$ 的根的个数为 2，故应选(B).

解 应选(B).

注 本题利用了结论 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_{n\times m} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{C}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{m\times m}||\boldsymbol{B}_{n\times n}|$.

【例 1-4】 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于________.

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$ (B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$ (D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

分析 本题可直接按第一行展开.

$$\text{原式}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

另法：若从解题技巧来分析，为了迅速找出答案，可令 $b_4=0$，则

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}a_4=a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3).$$

对比四个答案在 $b_4=0$ 的情形，只有(D)成立，所以应选(D).

解 应选(D).

【例 1-5】 计算行列式：$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=$________.

分析 本题是计算含字母型行列式的题型. 一般的计算方法就是先化简再降阶，或化为特殊型行列式. 由于本题中各行的四个元素的和均为 x，故可将后三列加到第一列上，再化为上三角行列式.

解
$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=x^4.$$

【例 1-6】 五阶行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} =$ ________.

分析 根据本题行列式的特殊结构，按第一行展开，得如下递推关系式：

$$\begin{aligned} D_5 &= (1-a)D_4 + aD_3 = (1-a)[(1-a)D_3 + aD_2] + aD_3 \\ &= [(1-a)^2 + a]D_3 + a(1-a)D_2 \\ &= (1-a+a^2)[(1-a)D_2 + a(1-a)] + a(1-a)D_2 \\ &= (1-a+a^2)[(1-a)(1-a+a^2) + a(1-a)] + a(1-a)(1-a+a^2) \\ &= 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5. \end{aligned}$$

解 应填 $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

【例 1-7】 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

分析 本题是一个非常有用的行列式，计算的方法是：利用各行的元素之和相同，提取公因式，然后将其化为三角行列式.

解 将后 $n-1$ 列加到第一列上，并提取公因子，再将第一行的(-1)倍加到后 $n-1$ 行上去，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

【例 1-8】 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中，对角线上的元素都是 a，未写出的元素都是 0.

分析 本题的计算方法比较多. 由于将行列式去掉一行一列后就得到了特殊的行列式，故可考虑按第一行或第一列展开；考虑到行列式的第 n 列加到第 1 列后可将其化为三角行列式，故也可利用性质将其化为特殊的行列式；再有就是将行列式的第 2 行与第 n 行互换，然后将第 2 列与第 n 列互换，则行列式变为特殊的行列式，故也可利用性质将行列式变形.

解 方法一：按第 1 行展开，得

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1+n}a^{n-2} = a^{n-2}(a^2-1).$$

方法二：将第 n 列加到第 1 列，再将第 n 行减去第 1 行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a+1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1+a & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & & & & 1 \\ & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & \\ & & & & a-1 \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1).$$

方法三：将第 2 行与第 n 行互换，再将第 2 列与第 n 列互换，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & a \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ 0 & a & & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= a^{n-2}(a^2-1).$$

【例 1-9】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3),\ \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

分析 由题设可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示，将此表示式转换为矩阵等式，再由矩阵行列式的性质即可求出 $|\boldsymbol{B}|$. 因为

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

所以

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\times(3-1)\times(3-2)\times(2-1) = 2.$$

解 应填 2.

注 线性代数中，要注意三种语言，即方程（组）语言、矩阵语言和几何（向量）语言的相互转换，这对于求解线性代数问题至关重要. 本题为向量语言转换为矩阵语言.

另外，本题也可利用行列式的性质进行恒等变形来计算.

【例 1-10】 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^2|=$ ________.

分析 本题属于计算方阵的行列式的题型，考查方阵的行列式的性质.

$$|2(A^{T}B^{-1})^{2}|=2^{3}|A^{T}B^{-1}|^{2}=2^{3}\cdot|A^{T}|^{2}\cdot|B^{-1}|^{2}$$
$$=2^{3}\cdot|A|^{2}\cdot\frac{1}{|B|^{2}}=2^{3}\times(-1)^{2}\times\frac{1}{2^{2}}=2.$$

解 应填 2.

【**例 1-11**】 设 A, B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|2A^{*}B^{-1}|=$________.

分析 本题属于计算方阵的行列式的题型，需要利用结论 $|A^{*}|=|A|^{n-1}$ 及 $|B^{-1}|=\frac{1}{|B|}$.

$$|2A^{*}B^{-1}|=2^{n}|A^{*}|\cdot|B^{-1}|=2^{n}\cdot|A|^{n-1}\cdot\frac{1}{|B|}=2^{n}\times2^{n-1}\times\frac{1}{-3}=-\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

解 应填 $-\frac{2^{2n-1}}{3}$.

【**例 1-12**】 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i, j=1, 2, 3)$，则 $|A|=$________.

分析 本题属于计算方阵的行列式的题型，由于题设中与代数余子式有关，故联想到伴随矩阵 A^{*}. 由条件 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i, j=1, 2, 3)$，得 $a_{ij}=-A_{ij}(i, j=1, 2, 3)$. 于是有

$$A=(a_{ij})=(-A_{ij})=-(A_{ij})=-(A^{*})^{T},$$

其中，A^{*} 为 A 的伴随矩阵. 所以

$$|A|=|-(A^{*})^{T}|=(-1)^{3}|(A^{*})^{T}|=-|A^{*}|=-|A|^{2} \text{或} |A|\cdot[1+|A|]=0.$$

从而

$$|A|=0 \text{ 或 } |A|=-1.$$

若 $|A|=0$，则由 $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-a_{i1}^{2}-a_{i2}^{2}-a_{i3}^{2}=0$ 得

$$a_{i1}=a_{i2}=a_{i3}=0 \quad (i=1, 2, 3),$$

即 $A=O$，这与 $A\neq O$ 的条件相矛盾. 故只有 $|A|=-1$.

解 应填 -1.

注 把行列式、代数余子式及行列式的具体元素联系起来的公式只有行列式按行（列）展开定理，提请读者注意.

【**例 1-13**】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^{*}=2BA^{*}+E$，其中 A^{*} 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B|=$________.

分析 利用 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$ 化简所给等式即可. 在所给等式两边同时右乘 A 得

$$ABA^{*}A=2BA^{*}A+EA,$$

即

$$|A|AB=2|A|B+A.$$

由于 $|A|=3$，所以上式可以写成

$$(3A-6E)B=A.$$

于是

$$|3A-6E|\cdot|B|=|A|,$$

从而

$$|B|=\frac{|A|}{|3A-6E|}=\frac{3}{27|A-2E|}=\frac{1}{9}.$$

故本题应填 $\frac{1}{9}$.

解 应填 $\frac{1}{9}$.

【例 1-14】 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

分析 本题属于计算方阵的行列式的题型，由于题中给出的是一个矩阵的表达式，故应首先考虑化简矩阵，再取行列式，可使计算变得简单.

解 因为 $|A|=\frac{1}{2}\neq 0$，故 A 可逆，于是，由

$$A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}\text{及 }(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1},$$

得

$$(2A)^{-1}-5A^*=\frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1}=-2A^{-1},$$

两端取行列式得

$$|(2A)^{-1}-5A^*|=|-2A^{-1}|=(-2)^3|A^{-1}|=(-2)^3|A|^{-1}=-16.$$

【例 1-15】 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，求 $|A^3-5A^2+7A|$.

分析 本题条件中涉及到方阵的特征值，故很容易想到特征值与方阵行列式之间的关系：$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. 因此，只要知道矩阵 A^3-5A^2+7A 的特征值，便可求出其行列式的值.

解 若 λ 为 A 的特征值，则 $\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$ 为 A^3-5A^2+7A 的特征值. 于是，由 A 的特征值为 1，2，3，可得 A^3-5A^2+7A 的特征值为 3，2，3. 再由特征值的性质，可知

$$|A^3-5A^2+7A|=3\times 2\times 3=18.$$

2 伴随矩阵的性质及应用

2.1 解题方法

伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的概念、性质及其应用是线性代数当中的一个重点内容，必须熟练掌握.

伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 由 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素的代数余子式构成，基本关系式为 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 求逆、转置、伴随三个运算能交换次序.

$\boldsymbol{A}^*$ 的相关结论有：

(1) $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$;

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

(3) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$;

(4) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$, $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$;

(5) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$, 则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

2.2 典型题解析

【例 2-1】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，证明：(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$; (2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

分析 本题是证明含有 $\boldsymbol{A}^*$ 的命题. 解决此类问题的一般想法都是从基本关系式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 出发来考虑问题.

证明 (1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 假若 $|\boldsymbol{A}^*|\neq0$, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{O}$, 此时 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 故 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. 这与 $|\boldsymbol{A}^*|\neq0$ 矛盾. 所以 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

(2) 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$; 若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 由 (1) 知 $|\boldsymbol{A}^*|=0$, 此时 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 也成立. 故有 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

【例 2-2】 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 $n(n\geqslant3)$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq0$, ±1. 则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$________.

(A) $k\boldsymbol{A}^*$　　(B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$　　(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$　　(D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$

分析 本题可采用加强条件的技巧，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 于是 $(k\boldsymbol{A})^*=|k\boldsymbol{A}|\cdot(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^n\cdot|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}\cdot|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$. 所以应选(B).

解 应选(B).

注 题设 $k\neq0$, ±1, $n\geqslant3$, 主要是为了使四个选项只有一个是正确的. 当然，若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，也能得到相应的结论，只是稍微复杂一些，此时要用到 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 其元素 a_{ij} 的代数余子式记作 A_{ij}, 则矩阵 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{n\times n}$, 若其元素的代数余子式记作 $\Delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则由行列式的性质有 $\Delta_{ij}=k^{n-1}A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 从而 $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

【例 2-3】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异($n\geqslant 2$)，$\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则________.

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

分析 本题涉及伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$，首先联想到公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^* = ||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}| \cdot (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$$
$$= |\boldsymbol{A}|^n \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}| \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

解 应选(C).

【例 2-4】 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^* =$________.

(A) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

分析 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^* = |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}$，从而

$$\boldsymbol{C}^* = |\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}.$$

可见应选(D).

当 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆时，利用定义可证(D)仍成立.

解 应选(D).

注 作为选择题，可在 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆的假设下进行推理，通过排除法即可找到正确的选项.

【例 2-5】 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为________.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) 3　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$

分析 因为 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$，由此可知 $a_{ij} = A_{ij}(\forall i, j = 1, 2, 3)$. 于是

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 3a_{11}^2 > 0.$$

又由于 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，两边取行列式并利用 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 及 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$，得 $|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}|$，从而 $|\boldsymbol{A}| = 1$. 因此，$3a_{11}^2 = 1$，故 $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 应选(A).

解 应选(A).

3 矩阵可逆的判定与逆矩阵的求法

3.1 解题方法

可逆矩阵是线性代数当中一个非常重要的概念，掌握判断矩阵可逆及求逆矩阵的方法，是学好线性代数的关键所在.

Ⅰ. 判断矩阵可逆的常用方法

(1) 定义法：若有方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(2) 行列式法：若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

(3) 求秩法：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(4) 利用相关性法：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组线性无关，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(5) 方程组法：若方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，或 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

Ⅱ. 求逆矩阵的常用方法

(1) 利用定义求逆矩阵：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$），则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

(2) 利用伴随矩阵求逆矩阵：$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

(3) 利用分块对角矩阵求逆矩阵：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_s & & & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

其中，$\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$均可逆.

(4) 利用初等行变换求逆矩阵：$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1})$.

3.2 典型题解析

【例 3-1】 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}(a<0)$，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$________.

分析 这里，$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$为 n 阶矩阵，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2a^2$为数，直接通过 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 进行计算并注意利用乘法的结合律即可. 由题设，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-2a\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E}+\left(-1-2a+\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}, \end{aligned}$$

于是有 $-1-2a+\frac{1}{a}=0$，即 $2a^2+a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=-1$；由于 $a<0$，故 $a=-1$.

解 应填 -1.

【例 3-2】 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，试求伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

分析 本题涉及伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的问题，注意利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

解 因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，所以 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，从而 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}$. 由

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{E}) &= \begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix} \\ &\sim\begin{pmatrix}1&0&1&2&-1&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

因此

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

【例 3-3】 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 已知 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

分析 本题实质上是已知矩阵等式求逆矩阵的问题，应从定义出发，先从等式中分解出因子 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，写成逆矩阵的定义的形式，从而确定 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵.

由 $AB=2A+B$，知 $AB-B=2A-2E+2E$，即有 $(A-E)B-2(A-E)=2E$，亦即 $(A-E)(B-2E)=2E$，或 $(A-E)\left[\frac{1}{2}(B-2E)\right]=E$. 由此可知

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2E)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

解 应填 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

【例 3-4】 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(B+E)^{-1}=$________.

分析 本题虽然可以由 A 先求出 $(E+A)^{-1}$，再作矩阵的乘法求出 B，最后通过求逆得到 $(B+E)^{-1}$，但这种方法的计算量太大. 下面利用单位矩阵恒等变形的技巧进行求解.

$$\begin{aligned}B+E&=(E+A)^{-1}(E-A)+E\\&=(E+A)^{-1}[(E-A)+(E+A)]=2(E+A)^{-1},\end{aligned}$$

所以

$$(B+E)^{-1}=[2(E+A)^{-1}]^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}.$$

解 应填 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$.

【例 3-5】 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$，其中，E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=$________.

分析 由于矩阵 A 的元素没有给出，因此用伴随矩阵、初等行变换求逆矩阵均行不通. 故本题只能从定义出发来求逆矩阵.

由 $A^2+A-4E=O$ 得 $(A^2-E)+(A-E)=2E$，即 $(A-E)(A+2E)=2E$，或 $(A-E)\left[\frac{1}{2}(A+2E)\right]=E$，可见 $A-E$ 可逆，且 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$.

解 应填 $\frac{1}{2}(A+2E)$.

【例 3-6】 设 A，B，$A+B$，$A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 等于________.

(A) $A^{-1}+B^{-1}$　　(B) $A+B$　　(C) $A(A+B)^{-1}B$　　(D) $(A+B)^{-1}$

分析　本题属于考查抽象矩阵用定义求逆矩阵的题型，采用排除法.

(A)(B)两项明显是干扰项，因为$A^{-1}+B^{-1}$的逆一般不等于自身，(B)相当于采用公式$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(A^{-1})^{-1}+(B^{-1})^{-1}=A+B$，这显然也是错误的.

由于不便直接计算$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$，可根据矩阵运算的性质直接求答案的逆，其结果为$A^{-1}+B^{-1}$的项为正确的. 对于(D)，由于$[(A+B)^{-1}]^{-1}=A+B\neq A^{-1}+B^{-1}$，所以(D)不正确，只有(C)为正确答案. 事实上

$$[A(A+B)^{-1}B]^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=A^{-1}+B^{-1}.$$

解　应选 (C).

【例 3-7】　设A为n阶非奇异矩阵，α为n维列向量，b为常数. 记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{T}A^{*} & |A| \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{T} & b \end{pmatrix},$$

其中，A^{*}是矩阵A的伴随矩阵，E为n阶单位矩阵.

(1) 计算并化简PQ；(2) 证明：矩阵Q可逆的充分必要条件是$\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$.

分析　对于涉及A^{*}的问题，应注意关系式$AA^{*}=A^{*}A=|A|E$. 判别Q可逆，可考虑利用$|Q|\neq0$的充要条件.

解 (1) 因为$AA^{*}=A^{*}A=|A|E$，故

$$\begin{aligned} PQ&=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{T}A^{*} & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{T} & b \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^{T}A^{*}A+|A|\alpha^{T} & -\alpha^{T}A^{*}\alpha+b|A| \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 证明：由 (1) 可得$|PQ|=|A|^{2}(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha)$，而$|PQ|=|P|\cdot|Q|$，且$|P|=|A|\neq0$，从而$|Q|=|A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha)$. 由此可知，$|Q|\neq0$的充分必要条件为$\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$，即矩阵$Q$可逆的充分必要条件是$\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$.

注　本题考查分块矩阵的运算，要把握小块矩阵的左右位置，要看清$\alpha^{T}A^{-1}\alpha$是1阶矩阵，是一个数.

4 方阵的高次幂的求法

4.1 解题方法

求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的高次幂的常用方法有如下几种.

(1) 列乘行法：当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$时，利用矩阵乘法的结合律，有

$$\boldsymbol{A}^k=\overbrace{(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})}^{k}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{k-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 均为 $n\times 1$ 矩阵（即 $\boldsymbol{A}$ 为"列"乘"行"矩阵）.

(2) 利用数学归纳法（找"规律"法），即通过计算 $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$, …，来寻找 $\boldsymbol{A}^k$的结论.

(3) "方阵的对角化"法：利用相似对角化，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

(4) "二项展开式"法：分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$，且 $\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{DB}$，利用二项展开公式，有

$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D})^k=\boldsymbol{B}^k+\mathrm{C}_k^1\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{D}+\mathrm{C}_k^2\boldsymbol{B}^{k-2}\boldsymbol{D}^2+\cdots+\mathrm{C}_k^{k-1}\boldsymbol{BD}^{k-1}+\boldsymbol{D}^k.$$

当 $\boldsymbol{B}^k$或 $\boldsymbol{D}^k$有某种规律，如为幂零矩阵时，此法很有效.

4.2 典型题解析

【例 4-1】 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$ ________.

分析 本题为求特殊矩阵的高次幂的题型. 因为题中 $\boldsymbol{A}$ 为"列"乘"行"矩阵，故可利用行乘列为一个数这个特点来计算，其中用到了矩阵乘法的结合律.

$$\boldsymbol{A}^n=\overbrace{(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})}^{n}=\boldsymbol{\alpha}\overbrace{(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})}^{n-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=3^{n-1}\boldsymbol{A}.$$

解 应填 $3^{n-1}\boldsymbol{A}$.

【例 4-2】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$n\geqslant 2$ 为整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$ ________.

分析 本题若分别计算 $\boldsymbol{A}^n$及 $\boldsymbol{A}^{n-1}$，再代入 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$求值，则将问题复杂化了. 一般

而言，可先试算 A^2，A^3，…，找出规律后，再进行计算. 因为

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2A,$$

故

$$A^n-2A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-2A)=O.$$

解 应填 O.

【例 4-3】 已知 $AP=PB$，其中，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A，A^5.

分析 本题实质上是相似矩阵的问题，利用相似矩阵求高次幂是一种重要的方法.

解 由于 $|P|=-1\neq0$，故 P 可逆；由 $AP=PB$，得

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

因此

$$A^5=(PBP^{-1})^5=\overbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}^{5}=PB^5P^{-1}$$
$$=PBP^{-1}=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

【例 4-4】 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中，$P$ 为 3 阶可逆矩阵，则 $B^{2004}-2A^2=$ ________.

分析 本题考查方阵高次幂的运算. 注意到$\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&\\&\lambda_2^k&\\&&\lambda_3^k\end{pmatrix}$，

则由

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

可知

$$A^{2004}=(A^2)^{1002}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{1002}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

从而

$$B^{2004}-2A^2=\overbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}^{2004}-2A^2=P^{-1}A^{2004}P-2A^2$$

$$=P^{-1}EP-2A^2=E-2A^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

解 应填$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

注 本题实际上是利用了$B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P=P^{-1}(A^2)^{1002}P$，而$A^2$是对角矩阵，故使计算得到了简化.

【例 4-5】 设$A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$，求$A^2$，$A^3$，…，$A^k$.

分析 本题可从矩阵A的前几次幂的结果中寻找规律，再利用数学归纳法证明.

解 直接计算，得

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}.$$

一般可得

$$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}.\qquad(*)$$

事实上，当$k=1$时，$(*)$式显然成立. 假设当$k=n$时，$(*)$式成立，则当$k=n+1$时

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\(n+1)\lambda&1\end{pmatrix}.$$

由数学归纳法知$(*)$式成立.

【例 4-6】 计算$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n$，其中$n$为正整数.

分析 将矩阵$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$进行分解：令$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$A=\lambda E+B$. 由于矩阵$\lambda E$与$B$可交换，于是有

$$A^n=(\lambda E+B)^n=(\lambda E)^n+C_n^1(\lambda E)^{n-1}B+C_n^2(\lambda E)^{n-2}B^2+\cdots+C_n^{n-1}(\lambda E)B^{n-1}+B^n.$$

而本题中的矩阵B是幂零指数为3的幂零矩阵，即$B^3=O$. 故利用"二项展开式"法，可将计算A^n的问题转化为$A^n=\lambda^nE+C_n^1\lambda^{n-1}B+C_n^2\lambda^{n-2}B^2$. 由此可得计算结果.

解 令

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$. 由于

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因此，当 $n>3$ 时，有 $\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}$. 因为矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=(\lambda\boldsymbol{E})^n+\mathrm{C}_n^1(\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_n^2(\lambda\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{n-1}+\boldsymbol{B}^n\\&=\lambda^n\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_n^1\lambda^{n-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_n^2\lambda^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{O}\\&=\lambda^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\lambda^{n-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\dfrac{n(n-1)\lambda^{n-2}}{2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注 若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足 $\boldsymbol{M}^k=\boldsymbol{O}$，其中，$k$ 为某一个正整数，则称 $\boldsymbol{M}$ 为幂零矩阵. 使得 $\boldsymbol{M}^k=\boldsymbol{O}$ 的最小的正整数 k 称为 $\boldsymbol{M}$ 的幂零指数. 本题中的 $\boldsymbol{B}$ 就是一个幂零矩阵，其幂零指数为3.

5 矩阵方程的解法

5.1 解题方法

求解矩阵方程问题，实质就是综合考核矩阵的运算问题. 解题的基本方法是：先利用矩阵运算的各种性质，将其化为矩阵方程的基本型，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 型，再利用逆矩阵求解.

(1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 型：若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则对 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

(2) $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 型：若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则对 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 两端同时右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.

(3) $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 型：若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均可逆，则对 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$、右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.

注 ① 化基本型的过程中，一定要注意矩阵的左乘、右乘是不同的，不要搞错左右次序.

② 对矩阵元素具体给出的矩阵方程，在求解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 时，可采用初等行变换法：

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{X}).$$

③ 当 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不可逆或不是方阵时，则将其变为线性方程组求解. 具体求解时，可设 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})$，将其代入化简后的方程，利用矩阵相等的条件，列出关于 x_{ij} 的线性方程组，解出 x_{ij}.

5.2 典型题解析

【例 5-1】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，其中，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，试求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

分析 本题应首先将矩阵方程化为基本型，再进一步讨论.

解 由 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，得 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，或 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

又因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=-1\neq0$，故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

注 本题利用了等式 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，这是一个特殊的结论. 一般来说，$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 是不成立的，只有当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时才成立.

【例 5-2】 已知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，其中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

分析 先将所给矩阵方程化为基本型，再利用初等行变换法求 X.

解 由 $X=AX+B$ 得 $(E-A)X=B$，再由

$$(E-A,\ B)=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&2&0\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}=(E,\ X)$$

得

$$X=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

【例 5-3】 设 $A=\mathrm{diag}(1,\ -2,\ 1)$，$A^*BA=2BA-8E$，求 B.

分析 这是矩阵方程的求解问题. 若能对已知条件进行适当的恒等变形，可以减少计算量. 由于已知矩阵方程中涉及了伴随矩阵 A^*，自然联想到利用公式 $AA^*=A^*A=|A|E$ 进行化简. 在等式两边左乘 A、右乘 A^{-1}，可以简化计算.

解 因 $|A|=-2\neq0$，故 A 可逆，在 $A^*BA=2BA-8E$ 两边左乘 A、右乘 A^{-1}，得

$$|A|B=2AB-8E.$$

即

$$-2B=2AB-8E \quad 或 \quad (A+E)B=4E.$$

再由 $|A+E|=\begin{vmatrix}2&&\\&-1&\\&&2\end{vmatrix}=-4\neq0$ 知 $A+E$ 可逆，于是有

$$B=4(A+E)^{-1}=4\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=4\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

【例 5-4】 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E,$$

其中，E 是 3 阶单位矩阵，求 X.

分析 先将所给方程化简，再用逆矩阵求解.

解 由题设条件，得

$$AX(A-B)+BX(B-A)=E,$$

即

$$(A-B)X(A-B)=E.$$

由于行列式 $|A-B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq0$，所以矩阵 $A-B$ 可逆，且

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

于是

$$X=[(A-B)^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

【例 5-5】 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中，E 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 B.

分析 先利用公式 $AA^*=A^*A=|A|E$ 进行化简，再用逆矩阵求解.

解 在等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两边左乘 A^*、右乘 A，得

$$A^*ABA^{-1}A=A^*BA^{-1}A+3A^*A,$$

即

$$|A|B=A^*B+3|A|E.$$

由 $|A^*|=|A|^3$，得 $|A|^3=8$，即 $|A|=2$. 代入上式，得

$$2B=A^*B+6E,$$

所以

$$(2E-A^*)B=6E.$$

再由 $|2E-A^*|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & 3 & 0 & -6\end{vmatrix}=-6\neq0$，知 $2E-A^*$ 可逆，从而

$$B=6(2E-A^*)^{-1}=6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & 3 & 0 & -6\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\0 & 6 & 0 & 0\\6 & 0 & 6 & 0\\0 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

注 （1）当题目中出现 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 时，一般需利用公式

$$AA^* = A^*A = |A|E \quad (E\text{ 是 }n\text{ 阶单位矩阵})$$

进行化简.

（2）应记住下列分块矩阵求逆矩阵的公式：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

【例 5-6】 设$(2E - C^{-1}B)A^{\mathrm{T}} = C^{-1}$，其中，$E$ 是 4 阶单位矩阵，A^{T}是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵，且

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求矩阵 A.

分析 先将所给方程化简，再用逆矩阵求解.

解 在已知矩阵方程的两边左乘 C，得

$$(2C - B)A^{\mathrm{T}} = E;$$

再两边取转置，得 $A(2C^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}}) = E$. 因为 A 是 4 阶矩阵，故

$$A = (2C^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 初等矩阵的应用

6.1 解题方法

初等变换在求矩阵的秩、求逆矩阵以及求解线性方程组等方面有着重要的应用.

三种初等变换对应三种初等矩阵：$\boldsymbol{E}(i,j)$，$\boldsymbol{E}[i(k)]$，$\boldsymbol{E}[i,j(k)]$，它们分别是将 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 交换第 i、j 两行（列），第 i 行（列）乘以非零数 k，将第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去（或是将第 i 列的 k 倍加到第 j 列去）所得到的初等矩阵.

三种初等矩阵都是可逆的，且

$$[\boldsymbol{E}(i,j)]^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j),\ \{\boldsymbol{E}[i(k)]\}^{-1}=\boldsymbol{E}\left[i\left(\frac{1}{k}\right)\right],\ \{\boldsymbol{E}[i,j(k)]\}^{-1}=\boldsymbol{E}[i,j(-k)].$$

初等矩阵具有如下性质：对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的初等矩阵；对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的初等矩阵.（即"左乘变行，右乘变列"）

以上关于初等矩阵的定义、性质及逆矩阵应牢记.

6.2 典型题解析

【例 6-1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则必有________.

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　(B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

分析 本题考查初等方阵的性质. 由于左乘 $\boldsymbol{P}_1$ 相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2 行，右乘 $\boldsymbol{P}_1$ 相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2 列；左乘 $\boldsymbol{P}_2$ 相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行加到第 3 行，右乘 $\boldsymbol{P}_2$ 相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 列加到第 1 列. 本题是先将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行加到第 3 行，再交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2 行，即有 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，故应选(C).

解 应选(C).

【例 6-2】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为________.

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

分析 $\boldsymbol{C}$ 是对 $\boldsymbol{A}$ 施行两次初等列变换得到的，因此，$\boldsymbol{C}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 与初等矩阵之积表示.

$$A \xrightarrow{\text{初等列变换}} B,\ 即\ B=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$B \xrightarrow{\text{初等列变换}} C,\ 即\ C=B\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

所以

$$C=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

解 应选(D).

注 如果对矩阵 A 施行一次初等行（列）变换后成为 B，则 B 等于 A 左（右）乘一个相应的初等矩阵.

【例 6-3】 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则________.

(A) $C=P^{-1}AP$ (B) $C=PAP^{-1}$ (C) $C=P^{T}AP$ (D) $C=PAP^{T}$

分析 把 C 表示成 A 与初等矩阵之积即可. 由题意，得

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \quad (*)$$

由于 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以(*)式可以表示为 $C=PAP^{-1}$.

解 应选(B).

注 每个初等变换都对应一个初等矩阵，并且对矩阵施行一次初等行（列）变换，相当于 A 左（右）乘一个相应的初等矩阵.

【例 6-4】 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$________.

(A) P_1P_2 (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) P_2P_1 (D) $P_2P_1^{-1}$

分析 本题考查矩阵的初等变换与初等矩阵. 由题意，得

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E.$$

即 $AP_1=B$，$P_2B=E$，所以 $P_2AP_1=E$，故 $A=P_2^{-1}EP_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$.

解 应选(D).

【例 6-5】 设 A 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，A^* 和 B^* 分别为 A 和 B 的伴随矩阵，则________.

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*　　(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$　　(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$

分析 从 $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$ 入手即可. 因为 $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$，所以

$$B^*=A^*\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^*=A^*\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=A^*\cdot(-1)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=-A^*\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

即交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$，因此本题应选(C).

解 应选(C).

注 (1) 如果对矩阵 A 施行一次初等行（列）变换成为矩阵 B，则 B 等于 A 左（右）乘与初等行（列）变换相对应的初等矩阵. 初等矩阵都是可逆矩阵. 应熟练掌握初等矩阵的定义与性质.

(2) 设 A，B 都是 n 阶矩阵，则以下公式应记住：$|AB|=|BA|$，$(AB)^T=B^TA^T$，$(AB)^*=B^*A^*$. 并且当 A，B 都可逆时，有 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

【例 6-6】 设 A 是 n 阶可逆方阵，将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到矩阵 B. (1) 证明 B 可逆；(2) 求 AB^{-1}.

分析 本题的关键是用初等矩阵来表示 A，B 之间的关系，若记 $E(i,j)$ 表示单位矩阵交换第 i 行与第 j 行所得到的初等矩阵，则 A 的第 i 行和第 j 行对换后的矩阵 $B=E(i,j)A$. 注意，因为是行变换，所以 $E(i,j)$ 应左乘 A.

解 (1) 由于 $B=E(i,j)A$，且 $|A|\neq 0$，所以

$$|B|=|E(i,j)A|=|E(i,j)|\cdot|A|=-|A|\neq 0,$$

故 B 可逆.

(2) $AB^{-1}=A[E(i,j)A]^{-1}=AA^{-1}[E(i,j)]^{-1}=[E(i,j)]^{-1}=E(i,j)$.

7 矩阵秩的求法

7.1 解题方法

矩阵的秩是矩阵的一个重要属性，它在判断方阵的可逆性、判断向量组的线性相关性、讨论线性方程组解的情况与解的结构以及二次型等方面都有重要的应用.

Ⅰ. 求矩阵的秩的方法

(1) 定义法：求矩阵非零子式的最高阶数就得到矩阵的秩.

(2) 初等行变换法：利用初等行变换，将矩阵化为行阶梯形矩阵，其非零行的行数即为该矩阵的秩.

(3) 利用矩阵秩的性质求秩.

(4) 利用矩阵的秩与向量组的秩的关系：矩阵的秩 = 矩阵行（列）向量组的秩.

Ⅱ. 矩阵的秩的重要性质

(1) $0 \leqslant R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) \leqslant \min\{m, n\}$;

(2) $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A})$;

(3) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$;

(4) 若 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $R(\boldsymbol{PAQ}) = R(\boldsymbol{A})$;

(5) $\max\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\} \leqslant R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$;

(6) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$;

(7) $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$;

(8) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l} = \boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

7.2 典型题解析

【例 7-1】 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

分析 本题考查矩阵的运算及矩阵的秩的求法. 由

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知 $R(\boldsymbol{A}) = 1$.

解 应填 1.

【例 7-2】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = 2$，而 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{AB}) =$

________.

分析 本题考查矩阵的秩的性质. 因为$|\boldsymbol{B}|=10\neq 0$, 所以$\boldsymbol{B}$可逆, 从而$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A})=2$.

解 应填2.

【例7-3】 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 且秩$R(\boldsymbol{A})=3$, 则$k=$________.

分析 由$\boldsymbol{A}$的秩为3知, $\boldsymbol{A}$的行列式一定为零, 从而可解出参数k. 不过应当注意的是, 若由$|\boldsymbol{A}|=0$得到的参数不唯一, 则应将参数代回去进行检验, 以便确定哪一个为正确答案, 因为使得$|\boldsymbol{A}|=0$只是必要条件而非充分条件.

由题设$R(\boldsymbol{A})=3$知, 必有

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)(k-1)^3=0,$$

解得$k=1$或$k=-3$. 显然, 当$k=1$时, $R(\boldsymbol{A})=1$, 不符合题意, 因此一定有$k=-3$.

解 应填-3.

注 (1) 在做此类填空题时, 排除$k=1$后可立刻得到$k=-3$, 不必真地将$k=-3$代入进行检验. 不过, 若先检验$k=-3$为正确答案时, 仍应检验$k=1$的情形, 因为可能两个值均是正确的.

(2) 本题也可通过初等行变换化$\boldsymbol{A}$为行阶梯形矩阵进行分析, 这是一般的方法.

【例7-4】 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵, $\boldsymbol{B}$为$n\times m$矩阵, $\boldsymbol{E}$为m阶单位矩阵. 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则________.

(A) 秩$R(\boldsymbol{A})=m$, 秩$R(\boldsymbol{B})=m$　　(B) 秩$R(\boldsymbol{A})=m$, 秩$R(\boldsymbol{B})=n$

(C) 秩$R(\boldsymbol{A})=n$, 秩$R(\boldsymbol{B})=m$　　(D) 秩$R(\boldsymbol{A})=n$, 秩$R(\boldsymbol{B})=n$

分析 因为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$是$m$阶单位矩阵, 所以$R(\boldsymbol{AB})=m$. 又因为$R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$, 故$R(\boldsymbol{A})\geqslant m$, $R(\boldsymbol{B})\geqslant m$; 另一方面, $\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, $\boldsymbol{B}$是$n\times m$矩阵, 则有$R(\boldsymbol{A})\leqslant m$, $R(\boldsymbol{B})\leqslant m$. 综上可知$R(\boldsymbol{A})=m$, $R(\boldsymbol{B})=m$. 应选(A).

解 应选(A).

【例7-5】 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$都是n阶非零矩阵, 且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的秩________.

(A) 必有一个等于零　　(B) 都小于n

(C) 一个小于n, 一个等于n　　(D) 都等于n

分析 方法一: 由于$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为非零矩阵, 所以$R(\boldsymbol{A})>0$, $R(\boldsymbol{B})>0$, 排除(A); 又由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$知$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$, 考虑到$R(\boldsymbol{A})>0$, $R(\boldsymbol{B})>0$, 显然(C) (D)均不成立, 只有(B)项为正确答案.

方法二: 由于$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$存在非零解, 故$R(\boldsymbol{A})<n$. 同理, $R(\boldsymbol{B})<n$.

方法三：因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的地位等同，故(A)(C)不正确；由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，故 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=0$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$，所以(D)不正确，只有(B)项成立.

解 应选(B).

【例 7-6】 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有________.

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq0$

分析 由伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩的关系式

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$$

知，$R(\boldsymbol{A}^*)=1\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=2$.

若 $a=b$，则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant1$，故可排除(A)(B).

当 $a\neq b$ 时，$\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\neq0$. 若要 $R(\boldsymbol{A})=2$，按照定义，只需 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ b & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2,$$

所以，由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 有 $a+2b=0$. 故应选(C).

解 应选(C).

【例 7-7】 已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则________.

(A) 当 $t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1　　(B) 当 $t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2

(C) 当 $t\neq6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1　　(D) 当 $t\neq6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2

分析 因为 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $R(\boldsymbol{P})\geqslant1$；又因为 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，所以 $R(\boldsymbol{P})+R(\boldsymbol{Q})\leqslant3$.

当 $t=6$ 时，$R(\boldsymbol{Q})=1$，于是有 $1\leqslant R(\boldsymbol{P})\leqslant2$；

当 $t\neq6$ 时，$R(\boldsymbol{Q})=2$，于是有 $1\leqslant R(\boldsymbol{P})\leqslant3-2=1$，即必有 $R(\boldsymbol{P})=1$.

解 应选(C).

【例 7-8】 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，其中，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明：(1) 秩 $R(\boldsymbol{A})\leqslant2$；(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则秩 $R(\boldsymbol{A})<2$.

分析 注意到本题中 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是列乘行的矩阵，有结论 $R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant1$. 故利用秩的性质 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$ 可证明 (1)；对于 (2)，利用 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性，可得出 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之间的关系，进而可知 $\boldsymbol{A}$ 此时是一个列乘行的矩阵，利用前面的结论便可证明.

证明 (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，则 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 均为 3 阶矩阵，且秩 $R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant1$，$R(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant1$，故

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2.$$

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则存在不全为0的数 k_1，k_2，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$；不妨设 $k_2\neq 0$，则有 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，那么

$$R(\boldsymbol{A})=R[\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+(k\boldsymbol{\alpha})(k\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}]=R[(1+k^2)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}]=R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant 1<2.$$

【例7-9】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵($n\geqslant 2$)，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & R(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

分析 本题是伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的一个重要关系式. 可从矩阵的秩的定义及伴随矩阵的定义出发来证明.

证明 (1) 当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$，故 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$，从而 $R(\boldsymbol{A}^*)=n$.

(2) 当 $R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$ 时，由矩阵的秩的定义知，$\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式均为0，即此时 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$.

(3) 当 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，由矩阵秩的定义知，$\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零，即 $\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一个非零元素，故 $R(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$. 另一方面，因为 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，所以有 $|\boldsymbol{A}|=0$，由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}^*$ 的列向量均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，而此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只含 $n-(n-1)=1$ 个解向量，故应有 $R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$. 综上可知 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

注 本题的结论很有用，一定要牢记.

8 向量组线性相关性的证明方法

8.1 解题方法

向量组的线性相关性的概念是线性代数的重点之一，也是难点. 应理解向量组的线性相关性，掌握判别方法，搞清它和向量组的秩的关系，以及和齐次线性方程组有非零解的关系. 判别向量组线性相关性有如下几种常用方法.

(1) 定义法：首先假设有一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$；然后根据题中所给定的条件，证明 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 即可.

(2) 矩阵秩法：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无(相)关$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)=m(<m)$.

(3) 表出法：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$线性相关$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示；$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中任一向量都不能由其余的向量线性表示.

(4) 齐次线性方程组法：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相（无）关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 有非零解（只有零解).

(5) 反证法.

8.2 典型题解析

【例 8-1】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 4, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2, t, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-2, 3, 1)^{\mathrm{T}}$线性相关，则 $t=$________.

分析 本题是判别向量组的相关性的逆问题，利用方法 (2) 可求出 t 的值.

因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，所以 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)<3$，故有$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=0$. 由

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & t & t+3\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-(t+3)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=7(t+3)=0$$

得 $t=-3$.

解 应填 -3.

【例 8-2】 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$, 其中，$c_1, c_2, c_3, c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的为________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

分析 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性相关$\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|=0$. 显然

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$必线性相关. 故应选(C).

解 应选 (C).

【例 8-3】 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s(3 \leqslant s \leqslant n)$线性无关的充要条件是________.

(A) 存在一组全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中存在一个向量, 它不能用其余的向量线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量都不能用其余的向量线性表示

分析 本题是寻找向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s(3 \leqslant s \leqslant n)$线性无关的充要条件. 由于本题的向量组是抽象的, 故应采用定义法或利用向量组线性相关性的性质来解决.

显然, 四个选项都是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s(3 \leqslant s \leqslant n)$线性无关的必要条件, 而只有条件(D)是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s(3 \leqslant s \leqslant n)$线性无关的充分条件, 故应选(D).

解 应选(D).

【例 8-4】 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有________.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

分析 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times l$ 矩阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$. 由于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为非零矩阵, 故 $0 < R(\boldsymbol{A}) < n$, $0 < R(\boldsymbol{B}) < n$.

由 $R(\boldsymbol{A}) < \boldsymbol{A}$ 的列数, 知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关; 由 $R(\boldsymbol{B}) < \boldsymbol{B}$ 的行数, 知 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关. 故应选(A).

解 应选(A).

【例 8-5】 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量中________.

(A) 必有 r 个行向量线性无关

(B) 任意 r 个行向量均可构成最大无关组

(C) 任意 r 个行向量均线性无关

(D) 任一行向量均可由其他 r 个行向量线性表示

分析 由定义知, $R(\boldsymbol{A}) = r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量组的秩也为 r, 即行向量组的最大无关组所含向量的个数为 r, 从而必存在 r 个线性无关的行向量. 故应选(A).

解 应选(A).

【例 8-6】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则________.

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行 (列) 的元素对应成比例

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任意一行 (列) 向量是其余各行 (列) 向量的线性组合

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一行 (列) 向量是其余各行 (列) 向量的线性组合

(D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行 (列) 的元素全为零

分析 本题中给出的四个条件都是$|\boldsymbol{A}|=0$的充分条件，但本题是寻找$|\boldsymbol{A}|=0$的必要条件. 由$|\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})<n\Rightarrow \boldsymbol{A}$的行（列）向量组线性相关$\Rightarrow \boldsymbol{A}$中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合. 故应选(C).

解 应选(C).

【例 8-7】 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则下列向量组中，线性无关的是________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\ 2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$

分析 判断一组向量的线性相关性，其基本方法就是定义法. 对于此类选择题，往往可直接观察某一组或几组向量的线性组合为零（系数不全为零），则这些向量线性相关. 若无法观察出来，最终才用定义法讨论. 又因为本题中的向量组是由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示的，所以也可利用秩来讨论.

对于(A)：$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=0$;

对于(B)：$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=0$.

可见，(A)(B)中的向量组线性相关.(C)(D)不便于观察到. 对于(C)，因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\ 2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix},$$

而$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{vmatrix}=12\neq0$，故矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$可逆，所以

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\ 2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=3,$$

从而知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关. 故应选(C).

对(D)可类似地讨论，可知是线性相关的.

解 应选(C).

【例 8-8】 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$均为n维列向量，$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，下列选项正确的是________.

(A) 若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关

(B) 若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关

(C) 若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关

(D) 若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关

分析 利用向量组线性相关性的定义，对选项逐个检查，检查到正确选项为止.

设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则存在不全为零的数k_1，k_2，…，k_s，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

于是

$$k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\alpha}_s=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=\boldsymbol{0},$$

所以，$\boldsymbol{A\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关. 因此本题应选(A).

解 应选(A).

注 由分析知，选项(B)是不正确的. 此外，当$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关时，$\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$未必线性相关，也未必线性无关. 例如，当$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$时，如果$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2$线性相关；如果$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，它们线性无关. 因此,选项(C)(D)也不正确.

【例 8-9】 设$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$，且向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$线性无关，证明向量组$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$线性无关.

分析 本题属于证明抽象向量组的线性相关性，可直接利用定义来证明. 又因为本题中向量组$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$是由向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$线性表示的，所以也可利用秩来讨论.

证明 证法一：利用定义证明.

设有常数$k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得$k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{0}$，即

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\cdots+k_r(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r)=\boldsymbol{0},$$

或

$$(k_1+k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_1+(k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$线性无关，故有$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0,\\ \quad k_2+\cdots+k_r=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ \quad k_r=0.\end{cases}$ 而 $\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1\neq0$，

于是得$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，从而由定义可知向量组$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$线性无关.

证法二：利用向量组的秩证明. 因为

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)\boldsymbol{K},$$

而$\det\boldsymbol{K}=1\neq0$，故$\boldsymbol{K}$是可逆阵. 由矩阵的性质知$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)$，又因为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$线性无关，故$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)=r$，从而有$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=r$，故向量组$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$线性无关.

【例 8-10】 已知$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且表出的系数全不为零，证明$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$中任意$s$个向量线性无关.

分析 本题只需证明在$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$中去掉任一$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$后的$s$个向量线性无关即可，这用反证法较为方便. 另一证法是证明去掉任一$\boldsymbol{\alpha}_i$后的向量组的秩为s.

证明 证法一：利用反证法. 假设$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}\ (i=1,2,\cdots,s)$线性相关，则存在不全为零的数$k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_s, k$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0},$$

其中，$k\neq0$. 这是因为，若$k=0$，则$k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_s$不全为零，这与$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关矛盾. 于是

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{1}{k}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s),$$

这表明，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，从而与已知$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示且表出系数全不为零矛盾. 于是，$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ $(i=1, 2, \cdots, s)$线性无关.

证法二：以 $\boldsymbol{F}_1$表示向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$；$\boldsymbol{F}_2$表示向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ $(1\leqslant i\leqslant s)$. 因此，$\boldsymbol{F}_2$可由 $\boldsymbol{F}_1$线性表示；$\boldsymbol{F}_1$中除 $\boldsymbol{\alpha}_i$外均可由 $\boldsymbol{F}_2$线性表示，而由已知条件

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

其中，所有的 $k_j\neq0(j=1, 2, \cdots, s)$，故有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{1}{k_i}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_i$也可由 $\boldsymbol{F}_2$线性表示. 因此 $\boldsymbol{F}_1$与 $\boldsymbol{F}_2$等价，它们的秩相等且都等于 s，而 $\boldsymbol{F}_2$只包含 s 个向量，所以 $\boldsymbol{F}_2$线性无关.

【例 8-11】 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应的齐次线性方程组的一个基础解系. 证明：

(1) $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关；

(2) $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，…，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

分析 本题属于证明抽象向量组的线性相关性，可直接利用定义来证明.

证明 (1) 设有 k，k_1，…，k_{n-r}，使得

$$k\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}, \tag{$*$}$$

在($*$)式两边左乘 $\boldsymbol{A}$，并注意题设条件，得

$$k(\boldsymbol{A\eta}^*)+k_1(\boldsymbol{A\xi}_1)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{A\xi}_{n-r})=\boldsymbol{0},$$

即 $k\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 得 $k=0$. 于是($*$)式成为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{\xi}_1$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应的齐次线性方程组的基础解系，从而线性无关，故有 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$. 即 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

(2) 设有 k，k_1，…，k_{n-r}，使得

$$k\boldsymbol{\eta}^*+k_1(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=\boldsymbol{0},$$

即

$$(k+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=0.$$

由 (1) 知 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，故有$\begin{cases}k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0,\\ k_1=0,\\ \cdots\cdots\\ k_{n-r}=0,\end{cases}$ 从而 $k=k_1=\cdots=k_{n-r}=0$，即 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，…，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

【例 8-12】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使得线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq0$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A\alpha}$，…，$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的.

分析 本题为证明一组抽象向量（每个向量的元素未具体给出）的线性相关性问题，可根据向量组线性无关的定义直接证明即可.

证明 设有一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha} + \lambda_2 \boldsymbol{A\alpha} + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \qquad (*)$$

为了利用 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，显然，$\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}(m \geqslant k)$. 于是在$(*)$式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$，得

$$\boldsymbol{A}^{k-1}(\lambda_1 \boldsymbol{\alpha} + \lambda_2 \boldsymbol{A\alpha} + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0},$$

即 $\lambda_1 \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，所以 $\lambda_1 = 0$. 于是$(*)$式变为

$$\lambda_2 \boldsymbol{A\alpha} + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0},$$

两边再左乘 $\boldsymbol{A}^{k-2}$，可推得 $\lambda_2 = 0$. 进而类似可证得 $\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_k = 0$. 由定义知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

9 向量组的最大无关组的求法

9.1 解题方法

向量组 $\boldsymbol{A}$ 的最大无关组 $\boldsymbol{A}_0$的意义就在于：可用$\boldsymbol{A}_0$组来“代表”$\boldsymbol{A}$ 组；特别地，当$\boldsymbol{A}$ 组为无限向量组时，就能用有限向量组 $\boldsymbol{A}_0$来“代表”. 求向量组的一个最大无关组，通常有以下方法.

（1）定义法：只需证明两条，一是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的部分组 $\boldsymbol{A}_0$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个向量均线性相关，则 $\boldsymbol{A}_0$就是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组.

（2）初等行变换法：以所给向量组为列向量构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的行数就是向量组的秩，也就是最大无关组中所含向量的个数；行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中非零行非零首元所占据的列对应的原列向量组，就是所求的列向量组的一个最大无关组.

（3）最高阶非零子式法：以所给向量组为列向量构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式为 D_r，则 D_r所在的 r 列（行）即为 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组的一个最大无关组.

9.2 典型题解析

【例 9-1】 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}$，则该向量组的最大无关组是________.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$　　（C）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5$　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$

分析 本题是求向量组的最大无关组的常规题型，也是一个重要的题型.

一般方法是：① 先求向量组的秩［可通过矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的秩来求得］，由此确定最大无关组中所含向量的个数；② 再寻找一个最大无关组（其方法之一是：在与 $\boldsymbol{A}$ 等价的行阶梯形矩阵中，非零行非零首元占据的列所对应的 $\boldsymbol{A}$ 中列向量组成的向量组就是一个最大无关组）. 具体求解如下. 因为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的最大无关组中含有 3 个列向量，可排除选项 (D)；再由最后一个行阶梯形矩阵中可以看出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 构成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的最大无关组，而选项中只有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，故应选择(B).

解 应选(B).

【例 9-2】 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$.

(1) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出；

(2) p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个最大无关组.

分析 (1) 四个 4 维向量是否线性无关，可直接由其构成的行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|$ 是否不为零来判断，或考虑到还要求把 $\boldsymbol{\alpha}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，即求 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}$ 的解，两步可结合在一起进行，直接通过初等行变换化矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha})$ 为行阶梯形；(2) 在 p 确定时，求向量组的秩和最大无关组可按常规方法处理.

解 对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha})$ 作初等行变换，得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $p\neq2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 此时设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，解得 $x_1=2$，$x_2=\dfrac{3p-4}{p-2}$，$x_3=1$，$x_4=\dfrac{1-p}{p-2}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\frac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

(2) 当 $p=2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关. 此时，向量组的秩等于 3. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$（或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$）为其一个最大无关组.

【例 9-3】 设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$. 问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表出.

分析 判别 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性相关性，可利用矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的秩来讨论；这可以直接通过初等行变换进行.

解 对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 作初等行变换，得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{pmatrix}.$$

若 $a=0$，则秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=1<4$，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为一个最大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

若 $a\neq 0$，则有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) \sim \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10+a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

当 $a=-10$ 时，则秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=3<4$，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关. $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个最大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

10 齐次线性方程组基础解系的判定与求法

10.1 解题方法

Ⅰ. 证明一组向量$\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, …, $\boldsymbol{\xi}_t$为n元齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ $[R(\boldsymbol{A})=r<n]$的基础解系，需证明下列三条同时成立：

(1) $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, …, $\boldsymbol{\xi}_t$均为$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解；

(2) $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, …, $\boldsymbol{\xi}_t$线性无关；

(3) $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, …, $\boldsymbol{\xi}_t$中所含向量的个数$t=n-r$.

Ⅱ. n元齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系的求法（$\boldsymbol{A}_{m\times n}$的元素具体给出）

若$R(\boldsymbol{A})=r<n$，则

(1) 将$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$用初等行变换化为行最简形矩阵；

(2) 由行最简形矩阵写出同解方程组；

(3) 在同解方程组中，将$n-r$个自由未知数取$n-r$组线性无关的值，代入同解方程组中，由此得方程组的$n-r$个线性无关的解$\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, …, $\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，此$n-r$个解即为所求的一个基础解系.

注 当$R(\boldsymbol{A})=n$时，方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解，此时它没有基础解系.

10.2 典型题解析

【例 10-1】 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$是4阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，若$(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$是方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系可为________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$

分析 本题没有给出具体的方程组，因此只能从基础解系的定义出发来讨论.

因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有一个线性无关的解，即$4-R(\boldsymbol{A})=1$，从而$R(\boldsymbol{A})=3$. 那么$R(\boldsymbol{A}^*)=1$，所以$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中含有$n-R(\boldsymbol{A}^*)=4-1=3$个线性无关的解，可见选项(A)(B)均错误.

再由$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，知$\boldsymbol{A}$的列向量全是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，而$R(\boldsymbol{A})=3$，故$\boldsymbol{A}$的列向量中必有3个线性无关.

最后，因为向量$(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，故$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，说明$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，从而$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，由此可知选项(C)错误. 故应选(D).

解 应选(D).

【例 10-2】 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，若$\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$, $\boldsymbol{\xi}_4$是非齐次线性方程组

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系________.

(A) 不存在 (B) 仅含有一个非零解向量

(C) 含有两个线性无关的解向量 (D) 含有三个线性无关的解向量

分析 本题的关键是确定系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 因为 $\boldsymbol{\xi}_1\neq\boldsymbol{\xi}_2$，知 $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，故 $R(\boldsymbol{A})<n$. 又因为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，说明至少有一个代数余子式 $A_{ij}\neq0$，即 $|\boldsymbol{A}|$ 中至少有一个 $n-1$ 阶子式非零，因此 $R(\boldsymbol{A})=n-1$. 那么 $n-R(\boldsymbol{A})=1$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中仅含有一个非零解向量，故应选(B).

解 应选(B).

【例 10-3】 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系是

$$\boldsymbol{\xi}_1=(2,\ -1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,2,4,7)^{\mathrm{T}}.$$

分析 本题是由基础解系反找齐次方程组的问题. 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{0}$ 有 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，可见 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x=\boldsymbol{0}$ 的解就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量（即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量）.

解 由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，知 $n-R(\boldsymbol{A})=2$，即 $R(\boldsymbol{A})=2$. 对于齐次方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x=\boldsymbol{0}$，由

$$\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\-1&2&4&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&3&5\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=(-2,\ -3,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-3,\ -5,0,1)^{\mathrm{T}}$. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，得所求的一个方程组为 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\3x_1+5x_2-x_4=0.\end{cases}$

【例 10-4】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

分析 按照基础解系的定义，要证明三个方面：(1) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 是解；(2) 它们线性无关；(3) 向量的个数等于 $n-R(\boldsymbol{A})$.

证明 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，类似可证 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$

即

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{00},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是基础解系，所以它们线性无关，故有 $\begin{cases}k_1+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0.\end{cases}$ 由于此方程组的系数行

列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，故必有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

根据题设，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中含 3 个解向量. 综上可知，$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

【例 10-5】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$为线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1 = t_1\boldsymbol{\alpha}_1 + t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2 = t_1\boldsymbol{\alpha}_2 + t_2\boldsymbol{\alpha}_3$，…，$\boldsymbol{\beta}_s = t_1\boldsymbol{\alpha}_s + t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中，$t_1$，$t_2$为实常数. 试问：$t_1$，$t_2$满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$也为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

分析　按照基础解系的定义，只要 t_1，t_2使得$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$线性无关即可.

解　显然，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，且由条件可知：$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中含 s 个解向量. 故只要 t_1，t_2使得$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$线性无关，即可保证$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 由于

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{pmatrix},$$

所以当 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关时，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$也线性无关的充要条件为

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0.$$

因此，当 t_1，t_2满足 $t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0$（即当 s 为偶数时，$t_1 \neq \pm t_2$；当 s 为奇数时，$t_1 \neq -t_2$）时，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

11 齐次线性方程组通解的求法

11.1 解题方法

对于求解齐次线性方程组问题，要紧紧围绕其系数矩阵的秩与未知数的个数进行讨论. 有非零解时，先确定基础解系所含线性无关的解向量的个数，也就是自由未知数的个数，再由等价的方程组求得基础解系，由此可得通解.

Ⅰ. 齐次线性方程组通解的结构

对 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$：

(1) 当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，方程组只有零解；

(2) 当 $R(\boldsymbol{A})=r<n$ 时，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 $n-r$ 个解：$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$. 此时方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$. 其中，$k_1$，$k_2$，…，$k_{n-r}$为任意实数.

Ⅱ. 齐次线性方程组通解的求法

(1) 利用通解的结构求通解：由 $R(\boldsymbol{A})$判断解的情况，并求出基础解系；写出通解.

(2) 利用初等行变换法求通解：将系数矩阵作初等行变换化为行最简形；由 $R(\boldsymbol{A})$判断解的情况；由最简形得同解方程组；选择非自由未知数，写出通解.

11.2 典型题解析

【例 11-1】 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，其中，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，现有四个命题：

① 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})$；

② 若 $R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解；

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$；

④ 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

以上命题正确的是________.

(A) ① ②　　　　(B) ① ③　　　　(C) ② ④　　　　(D) ③ ④

分析　考查所给的四个命题发现，如果①正确，则③必然正确；同样，若②正确，则④也必然正确. 因此只要考查① ②即可.

当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解时，有 $n-R(\boldsymbol{A})\leqslant n-R(\boldsymbol{B})$，即 $R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})$. 所以①正确，从而③也正确. 因此本题应选(B).

解　应选(B).

注　(1) 命题②不正确. 例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，但 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}=(1,0)^{\mathrm{T}}$不是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$（其中，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵）的基础解系包含的解向量的个数为 $n-R(\boldsymbol{A})$.

(3) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$(其中, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同为 $m\times n$ 矩阵) 同解的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

【例 11-2】 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解向量, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解必定是________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　(B) $k\boldsymbol{\alpha}_1$　(C) $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　(D) $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

分析　因为通解中必有任意常数, 所以(A) 不正确. 由 $n-R(\boldsymbol{A})=1$ 知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由一个非零解向量构成. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 中哪一个一定是非零解向量呢?

由已知条件 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 只是两个不同的解向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以是零解, 因此 $k\boldsymbol{\alpha}_1$ 可能不是通解. 同样, 也不一定能保证 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$. 因此可排除(B)(C). 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以必有 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$, 可见(D)正确.

解　应选(D).

【例 11-3】 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分必要条件是________.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关　(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关　(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

分析　本题考查齐次线性方程组仅有零解的充要条件.

因 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n=\boldsymbol{A}$ 的列数 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关. 故应选择(B).

解　应选(B).

【例 11-4】 求解齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0.\end{cases}$

分析　本题为解齐次线性方程组题. 一般方法如下:

① 将系数矩阵作初等行变换化为行最简形;

② 由 $R(\boldsymbol{A})$ 判断解的情况;

③ 由行最简形得同解方程组;

④ 选择非自由未知数, 写出通解.

解　因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

所以 $R(\boldsymbol{A})=2<4$, 故方程组有无穷多组解.

同解方程组为 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_4=0,\\x_3=0,\end{cases}$ 通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,\ k_2\in\mathbf{R}).$$

【例 11-5】 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 试求 λ 的值.

分析 本题先从条件 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 出发, 推导出 $\boldsymbol{B}$ 的每列均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解; 再由条件 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$ 得出齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解, 进而可知 $R(\boldsymbol{A}) < 3$, 即 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由此可求得 λ 的值.

解 令 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$, 则由题设知

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{Ab}_1, \boldsymbol{Ab}_2, \boldsymbol{Ab}_3) = \boldsymbol{O},$$

即

$$\boldsymbol{Ab}_j = \boldsymbol{0} \quad (j = 1, 2, 3).$$

又因为 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$不全为零向量, 说明齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解, 所以必有 $R(\boldsymbol{A}) < 3$, 从而 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, 解得 $\lambda = 1$.

注 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 这种关系式非常重要, 意指 $\boldsymbol{B}$ 的每列均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 从而这个简单的式子把矩阵的运算、线性方程组的解以及矩阵的秩等多个重要概念联系起来了.

【例 11-6】 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 = 0. \end{cases}$

(1) a, b, c 满足何种关系时, 方程组仅有零解?

(2) a, b, c 满足何种关系时, 方程组有无穷多组解? 并用基础解系表示全部解.

分析 显然, 系数矩阵所对应的行列式为范德蒙行列式. 当 a, b, c 两两不相同时, 系数行列式不为零, 齐次线性方程组仅有零解; 当 a, b, c 并非两两不相同时, 需要分四种情况分别讨论.

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

(1) 当 $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ 时, $D \neq 0$. 方程组仅有零解: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(2) 下面分四种情况讨论:

① 当 $a = b \neq c$ 时, 同解方程组为$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$ 方程组有无穷多组解, 全部解为 $k_1(1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$ (k_1为任意常数).

② 当 $a = c \neq b$ 时, 同解方程组为$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$ 方程组有无穷多组解, 全部解为 $k_2(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$ (k_2为任意常数).

③ 当 $b=c\neq a$ 时，同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1\qquad\quad=0,\end{cases}$ 方程组有无穷多组解，全部解为 $k_3(0,1,-1)^{\mathrm T}$（k_3为任意常数）.

④ 当 $a=b=c$ 时，同解方程组为 $x_1+x_2+x_3=0$，方程组有无穷多组解，全部解为 $k_4(-1,1,0)^{\mathrm T}+k_5(-1,0,1)^{\mathrm T}$（$k_4$，$k_5$为任意常数）.

【例 11-7】 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解？并求出其通解.

分析 利用齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件来确定参数 a 的取值，进而求方程组的非零解.

解 对齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol A$ 作初等行变换，得

$$\boldsymbol A=\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2a&a&0&0\\-3a&0&a&0\\-4a&0&0&a\end{pmatrix}.$$

当 $a=0$ 时，$R(\boldsymbol A)=1<4$，故方程组有非零解，且同解方程组为 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$，基础解系为 $\boldsymbol\xi_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol\xi_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol\xi_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm T}$，此时，通解为

$$x=k_1\boldsymbol\xi_1+k_2\boldsymbol\xi_2+k_3\boldsymbol\xi_3\quad(\text{其中，}k_1,\ k_2,\ k_3\text{为任意常数}).$$

当 $a\neq0$ 时，$\boldsymbol A\sim\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}10+a&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}$，可见，当 $10+a=0$，即 $a=-10$时，$R(\boldsymbol A)=3<4$，此时方程组有非零解，且同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\-3x_1+x_3=0,\\-4x_1+x_4=0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x_2=2x_1,\\x_3=3x_1,\\x_4=4x_1,\end{cases}$$

由此得基础解系为 $\boldsymbol\xi=(1,2,3,4)^{\mathrm T}$，此时，通解为 $\boldsymbol x=k\boldsymbol\xi$，其中，$k$ 为任意常数.

【例 11-8】 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\cdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中，$a\neq0$，$b\neq0$，$n\geqslant2$. 试讨论当 a，b 为何值时，方程组仅有零解？有无穷多组解？在有

无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

分析 本题是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组，$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故可从计算系数行列式入手.

解 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(1) 当 $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时，方程组只有零解.

(2) 当 $a=b$ 时，对系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $n-R(\boldsymbol{A})=n-1$，取自由未知数为 $x_2, x_3, \cdots, x_n$，得到基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

方程组的通解为 $x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$，其中，$k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为任意常数.

(3) 当 $a=(1-n)b$ 时，对系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & (1-n)b & b \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} -nb & 0 & 0 & \cdots & 0 & nb \\ 0 & -nb & 0 & \cdots & 0 & nb \\ 0 & 0 & -nb & \cdots & 0 & nb \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -nb & nb \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&-1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\b&b&b&\cdots&b&(1-n)b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&-1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，有 $n-R(\boldsymbol{A})=1$，即基础解系中只有一个解向量．取自由未知数为 x_n，则基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，故方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}$，其中，$k$ 为任意常数.

【例 11-9】 线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0\end{cases}$$

的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，$M_i(i=1,2,\cdots,n)$是在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 i 列所得到的 $n-1$ 阶子式，证明：

（1）$[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]^{\mathrm{T}}$是该方程组的一个解；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则方程组的解都是$[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]^{\mathrm{T}}$的倍数.

分析 为证明（1），可直接把$[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]^{\mathrm{T}}$代入方程组进行验证，但在验证时，可以采用下面的方法：做辅助行列式

$$\begin{vmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{vmatrix}=a_{i1}M_1+a_{i2}(-M_2)+\cdots+a_{in}(-1)^{n-1}M_n\quad(i=1,2,\cdots,n-1),$$

从而由行列式的性质知其为零．对于（2），因为 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，所以方程组的基础解系中只包含一个解向量，同时 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$不全为零，即$[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]^{\mathrm{T}}$是方程组的一个非零解，它就是方程组的一个基础解系.

证明（1）对 $i=1,2,\cdots,n-1$，有

$$0=\begin{vmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{vmatrix}=a_{i1}M_1+a_{i2}(-M_2)+\cdots+a_{in}(-1)^{n-1}M_n,$$

即向量$[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]^{\mathrm{T}}$满足第 i（$i=1,2,\cdots,n-1$）个方程，所以它是方

程组的解.

(2) 因为 $R(\boldsymbol{A})=n-1$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于零, 即 M_1, $-M_2$, $\cdots$, $(-1)^{n-1}M_n$不全为零; 另一方面, 方程组的基础解系由 $n-R(\boldsymbol{A})=n-(n-1)=1$ 个解向量组成, 因此, M_1, $-M_2$, $\cdots$, $(-1)^{n-1}M_n$是方程组的一个基础解系, 故通解为

$$k[M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n]^{\mathrm{T}} \quad (k\in\mathbf{R}).$$

12 非齐次线性方程组有解的判定及通解的求法

12.1 解题方法

Ⅰ. 非齐次线性方程组有解的判定方法

对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$，则

(1) 当 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$ 时，方程组无解；

(2) 当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=n$（$n$ 为未知量的个数）时，方程组有唯一解；

(3) 当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r<n$ 时，方程组有无穷多解，其通解形式为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*.$$

其中，$\boldsymbol{\eta}^*$ 是方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-r}$ 为任意常数.

注 当 $\boldsymbol{A}$ 为方阵时，方程组有唯一解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

Ⅱ. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解的求法

(1) 利用通解的结构求通解；

(2) 利用初等行变换法：

① 将增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ 作初等行变换化为行最简形；

② 由 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $R(\boldsymbol{B})$ 的关系判断解的情况；

③ 由行最简形得同解方程组；

④ 选择非自由未知数，写出通解.

12.2 典型题解析

【例 12-1】 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中未知量的个数为 n，方程的个数为 m，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则________.

(A) 当 $r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

(B) 当 $r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(C) 当 $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(D) 当 $r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

分析 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$. 题中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若 $R(\boldsymbol{A})=m$，相当于 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量线性无关，因此，添加一个分量后得 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ 的 m 个行向量仍线性无关，即有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解. 故(A)成立. 对于(B)(C)(D)均不能保证 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$，也就不能保证 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，更谈不上有唯一解或无穷多解.

解 应选(A).

【例 12-2】 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$________.

分析 本题为含参数的非齐次线性方程组有解的逆问题.

由条件可知，$R(A)=R(A,b)<3$. 因为

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 2(2+a) \end{pmatrix},$$

可见，当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时，$R(A)=R(A,b)=3$，方程组有唯一解；当 $a=1$ 时，$R(A)\neq R(A,b)$，方程组无解；当 $a=-2$ 时，$R(A)=R(A,b)=2<3$，方程组有无穷多个解. 故 $a=-2$ 为所求.

解 应填 -2.

【例 12-3】 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=t, \\ -x_2+x_3+x_4=3, \end{cases}$ 问 t 取何值时，方程组有解？在方程组有解时，求出其通解.

分析 本题为解含参数的非齐次线性方程组问题，是很重要的典型题. 一般方法如下：

① 将增广矩阵 $B=(A,b)$ 作初等行变换化为行最简形；

② 由 $R(A)$ 与 $R(B)$ 的关系判断解的情况，由此得相应的取值；

③ 由行最简形得同解方程组；

④ 选择非自由未知数，写出通解.

解 因为 $B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & t \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & t-2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix},$$

所以，当 $t+1=0$，即 $t=-1$ 时，方程组才有解，此时

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-2x_3-2x_4+4, \\ x_2=x_3+x_4-3, \end{cases}$ 其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1,k_2\in \mathbf{R}).$$

【例 12-4】 问 a, b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？并求出有无穷多解时的通解.

分析 利用线性方程组有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩的理论，首先通过初等行变换化增广矩阵为行阶梯形矩阵，然后根据行阶梯形矩阵来判定参数为何值时线性方程组是否有解.

解 对增广矩阵作初等行变换，把它变为行阶梯形矩阵，有

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

可见：当 $a \neq 1$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 4$. 此时方程组有唯一解；

当 $a = 1$ 且 $b \neq -1$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = 2$，$R(\boldsymbol{B}) = 3$，$R(\boldsymbol{A}) \neq R(\boldsymbol{B})$，此时方程组无解；

当 $a = 1$ 且 $b = -1$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 2 < 4$，此时方程组有无穷多解，此时

$$\boldsymbol{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1, \end{cases}$ 其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1,\ k_2 \in \mathbf{R}).$$

【例 12-5】 已知 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同解，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1，k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解（一般解）必是________.

(A) $k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(B) $k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C) $k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(D) $k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$

分析 本题是求非齐次线性方程组的通解问题. 由非齐次线性方程组的通解的结构知，$Ax=b$ 的通解为其一个特解与其对应的齐次线性方程组的基础解系的线性组合之和. 由此对照4个选项，因为 $\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ 是 $Ax=0$ 的解，不是 $Ax=b$ 的解，所以可排除(A)(C).

在(B)(D)中，$\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 是方程组 $Ax=b$ 的一个解，故只需看它们前两项的和是否为对应的齐次线性方程组的通解. 显然，(D)中的 $\beta_1-\beta_2$ 也是 $Ax=b$ 的一个非零解，但是否与 α_1 线性无关不能确定. 故也可排除. 剩下的就只有(B)，易证 α_1 与 $\alpha_1-\alpha_2$ 是线性无关的，所以(B)是正确的答案.

解 应选(B).

【例12-6】 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量，且 $\eta_1=(2,3,4,5)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T$，求该方程组的通解.

分析 本题是求非齐次线性方程组的通解问题. 其方法是：按照通解的结构，应找出非齐次线性方程组的一个特解（本题选 η_1 即可），再找出对应的齐次线性方程组的基础解系（这又回归到基础解系的求法问题).

解 由在 $Ax=b$ 中，$R(A)=3$，知 $Ax=0$ 的基础解系中含 $4-3=1$ 个解向量. 又因为

$$\xi=(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1-\eta_3)=2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(3,4,5,6)^T\neq 0,$$

所以 ξ 为 $Ax=0$ 的基础解系，从而 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k\xi+\eta_1=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ (k\in\mathbf{R}).$$

【例12-7】 设矩阵 $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$，其中，a_2, a_3, a_4 线性无关，$a_1=2a_2-a_3$. 向量 $b=a_1+a_2+a_3+a_4$，求方程 $Ax=b$ 的通解.

分析 由 b 的表达式可知，$Ax=b$ 有特解 $\eta=(1,1,1,1)^T$. 因此只要考虑对应的齐次线性方程组的通解即可.

解 因为 a_2, a_3, a_4 线性无关，所以 $R(A)\geqslant 3$；又因为 $a_1=2a_2-a_3=2a_2-a_3+0a_4$，可知 a_1, a_2, a_3, a_4 线性相关，所以 $R(A)\leqslant 3$. 综上可知 $R(A)=3$，故 $Ax=0$ 的基础解系中含 $4-3=1$ 个解向量. 而由 $a_1-2a_2+a_3+0a_4=0$ 知 $\xi=(1,-2,1,0)^T\neq 0$ 即为 $Ax=0$ 的基础解系，再由 $b=a_1+a_2+a_3+a_4$ 知 $\eta=(1,1,1,1)^T$ 为 $Ax=b$ 的一个解. 故 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k\xi+\eta=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad (k\in\mathbf{R}).$$

注 由于线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ $[A_{m\times n}=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T]$ 可等价地表示为 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$. 由此可知，线性方程组解的判定或求解问题可以等价地转化为向量组的线性相关性（线性表示、线性相关或无关）问题.

【例 12-8】 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

分析 (1) 只要证明所给的非齐次线性方程组对应的齐次线性方程组的基础解系包含两个线性无关的解即可.

(2) 按照 $R(\boldsymbol{A})=2$ 确定 a, b 的值, 然后求所给非齐次线性方程组的通解.

解 (1) 容易看到 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 此外, 由于所给的非齐次线性方程组有三个线性无关的解, 记为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是对应的齐次线性方程组的解, 并且它们线性无关. 事实上, 若有数 k_1, k_2, 使得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

即

$$(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_1-k_1\boldsymbol{\alpha}_2-k_2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

则由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关得 $k_1=k_2=0$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 由此可知对应的齐次线性方程组的基础解系中至少包含两个线性无关的解, 所以 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$. 因此 $R(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换, 得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 \end{pmatrix},$$

由 $R(\boldsymbol{A})=2$ 得 $\begin{cases} 4-2a=0, \\ 4a+b-5=0, \end{cases}$ 解此方程组, 得 $a=2$, $b=-3$.

对所给的非齐次线性方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换, 得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3+4x_4+2, \\ x_2 = x_3-5x_4-3, \end{cases}$ 其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1,\ k_2\in \mathbf{R}).$$

注 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系包含的解的个数 $k=n-R(\boldsymbol{A})$, 因此 $R(\boldsymbol{A})=n-k$. 本题就是按照此思路证明 (1) 的.

【例 12-9】 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

分析 本题考查含参数的方程组确定参数的方法，并求解方程组. 解此题的要点是理解非齐次方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解这个条件，由此得系数行列式 $|A|=0$（有解的必要条件），从而确定出 λ 与 a. 将 λ 与 a 的值代入方程组中，求解就是常规问题了.

解 (1) 因为线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解，所以 $R(A)=R(A, b)<3$. 由

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$$

知 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时，必有 $R(A)=1$, $R(A, b)=2$. 此时，线性方程组 $Ax=b$ 无解. 故 $\lambda=1$ 应舍去.

当 $\lambda=-1$ 时，

$$(A, b)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{pmatrix}.$$

若 $a=-2$，则 $R(A)=R(A, b)=2<3$. 此时，线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解. 故 $\lambda=-1$, $a=-2$.

(2) 当 $\lambda=-1$, $a=-2$ 时，因为

$$(A, b)\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故线性方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k(1, 0, 1)^{T}+\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^{T}, \quad (\text{其中，}k\text{ 为任意常数}).$$

【例 12-10】 已知 $\alpha_1=(1, 0, 2, 3)^T$, $\alpha_2=(1, 1, 3, 5)^T$, $\alpha_3=(1, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_4=(1, 2, 4, a+8)^T$ 及 $\beta=(1, 1, b+3, 5)^T$.

(1) 当 a, b 为何值时，β 不能表示成 α_1, α_2, α_3, α_4 的线性组合？

(2) 当 a, b 为何值时，β 有 α_1, α_2, α_3, α_4 的唯一的线性表示式？并写出该表达式.

分析 本题是讨论参数 a, b，以确定向量 β 能否由向量组 α_1, α_2, α_3, α_4 线性表出的问题，其实质是确定一个线性方程组是否有解，即对于方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$$

在 a, b 为何值时，无解和有唯一解.

解 设$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，则

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_2-x_3+2x_4=1,\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3,\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5,\end{cases}$$

$\boldsymbol{\beta}$能否表示成$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合，转化为上述方程组是否有解的问题.

对增广矩阵作初等行变换，化成行阶梯形矩阵，得

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}.$$

(1) 当$a=-1$，$b\neq0$时，方程组的增广矩阵的秩为3，系数矩阵的秩为2，方程组无解，即此时$\boldsymbol{\beta}$不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合.

(2) 当$a\neq-1$时，方程组的系数矩阵的秩为4，方程组有唯一解，即此时$\boldsymbol{\beta}$有$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的唯一的线性表示式. 这时，$x_1=-\dfrac{2b}{a+1}$，$x_2=\dfrac{a+b+1}{a+1}$，$x_3=\dfrac{b}{a+1}$，$x_4=0$，且

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4.$$

【例 12-11】 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm T}$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm T}$线性表示.

(1) 求a的值；

(2) 将$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

分析 (1) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$不能用$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性表示$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)<R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant3\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性相关.

由此可求出a的值.

(2) 将$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，只需解矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)K_{3\times3},$$

求出系数矩阵$\boldsymbol{K}_{3\times3}$即可.

解 (1) 因为$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=1\neq0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性表示$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性相关，即

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&a-5\end{vmatrix}=a-5=0,$$

所以$a=5$.

(2) 方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_j\ (j=1,2,3)$都有解，即$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \vdots\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

13 两个线性方程组有公共解的判定及求法

13.1 解题方法

讨论两个线性方程组有公共解的常用方法有：

(1) 根据两个方程组有公共解的条件，把这两个方程组联立后的方程组也应有解，且其解即为所求的公共解；

(2) 把一个方程组的解代入另一个方程组中，由此确定它们的公共解；

(3) 令两个方程组的通解相等，由此确定成立的系数关系，进而求出公共解；

(4) 确定两个方程组同解时，只需验证这两个方程组的通解相同.

13.2 典型题解析

【例 13-1】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组（Ⅰ）：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和（Ⅱ）：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，必有________.

(A)（Ⅱ）的解是（Ⅰ）的解，（Ⅰ）的解也是（Ⅱ）的解

(B)（Ⅱ）的解是（Ⅰ）的解，但（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解

(C)（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解，（Ⅱ）的解也不是（Ⅰ）的解

(D)（Ⅰ）的解是（Ⅱ）的解，但（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解

分析 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅰ）的解，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$，那么$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅱ）的解. 若 $\boldsymbol{\beta}$ 是（Ⅱ）的解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}$. 上式用 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$左乘得 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}$，即$(\boldsymbol{A\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\beta})=0$，故必有 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 是（Ⅰ）的解. 所以（Ⅰ）与（Ⅱ）同解. 故应选(A).

解 应选(A).

【例 13-2】 设方程组（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程(Ⅱ) $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有的公共解.

分析 由于本题的两个方程组都具体给出，所以根据有公共解的条件，可把这两个方程组联立后求解，且其解即为所求的公共解；也可以把一个方程组的解代入另一个方程组，确定它们的公共解.

解 解法一：把方程组(Ⅰ)与（Ⅱ）联立，得方程组

$$(\text{Ⅲ})\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1, \end{cases}$$

则方程组（Ⅲ）的解就是方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的公共解.

对方程组（Ⅲ）的增广矩阵作初等行变换，有

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1-a\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix},$$

则方程组（Ⅲ）有解$\Leftrightarrow (a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$B\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时方程组（Ⅲ）的通解为 $k(-1,0,1)^{T}$（k 为任意常数），即为方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的公共解.

当 $a=2$ 时，$B\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时方程组（Ⅲ）有唯一解 $(0,1,-1)^{T}$，这也是方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的唯一公共解.

解法二：先求出方程组（Ⅰ）的解，其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}=(a-1)(a-2).$$

当 $a\neq1$ 且 $a\neq2$ 时，齐次方程组（Ⅰ）只有零解，但零向量不是方程组（Ⅱ）的解，所以方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的公共解只在 $a=1$ 或 $a=2$ 时才有可能.

当 $a=1$ 时，对方程组（Ⅰ）的系数矩阵作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程组（Ⅰ）的通解为 $k(-1,0,1)^{T}$（k 为任意常数），而此解也是方程组（Ⅱ）的解. 故方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的公共解为 $k(-1,0,1)^{T}$（k 为任意常数）.

当 $a=2$ 时，对方程组（Ⅰ）的系数矩阵作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故方程组（Ⅰ）的通解为 $k(0,-1,1)^{T}$（k 为任意常数），把 $x_1=0$，$x_2=-k$，$x_3=k$ 代入方程（Ⅱ），解得 $k=-1$. 因此方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的公共解为 $(0,1,-1)^{T}$.

【例 13-3】 设四元齐次线性方程组（Ⅰ）为 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\end{cases}$ 又已知某齐次线性方程组（Ⅱ）的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{T}+k_2(-1,2,2,1)^{T}$.

(1) 求线性方程组（Ⅰ）的基础解系；

(2) 问线性方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共

解. 若没有，则说明理由.

分析 本题的关键是如何理解方程组（Ⅰ）（Ⅱ）有非零的公共解. 具体求法：一是由（Ⅰ）（Ⅱ）的通解表达式相等来确定；二是将（Ⅱ）的通解代入（Ⅰ）中，看是否存在非零的数 k_1 和 k_2 满足方程而确定（Ⅰ）和（Ⅱ）有无非零公共解.

解 (1) 由已知，（Ⅰ）的系数矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_2,\\x_4=x_2,\end{cases}$ 故（Ⅰ）的基础解系可取为 $(0,1,1,0)^{\mathrm T}$，$(-1,1,0,1)^{\mathrm T}$. 其通解为 $k_3(0,0,1,0)^{\mathrm T}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm T}$.

(2) 解法一：令 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm T}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm T}=k_3(0,0,1,0)^{\mathrm T}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm T}$，解得 $k_1=-k$，$k_2=k_3=k_4=k$，故其非零公共解为

$$-k(0,1,1,0)^{\mathrm T}+k(-1,2,2,1)^{\mathrm T}=k(-1,1,1,1)^{\mathrm T}\quad(k\neq0,\text{且为任意常数}).$$

解法二：将（Ⅱ）的通解代入方程组（Ⅰ）中，则有 $\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0,\\k_1+2k_2-k_2=0,\end{cases}$ 解得 $k_1=-k_2$. 当 $k_1=-k_2\neq0$ 时，向量

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm T}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm T}=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm T}$$

满足方程组（Ⅰ）（Ⅱ），故方程组（Ⅰ）（Ⅱ）有非零公共解，所有非零公共解是 $k(-1,1,1,1)^{\mathrm T}$ $(k\neq0$，且为任意常数).

【例 13-4】 已知非齐次线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6,\\4x_1-x_2-x_3-x_4=1,\\3x_1-x_2-x_3=3,\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\begin{cases}x_1+mx_2-x_3-x_4=-5,\\nx_2-x_3-2x_4=-11,\\x_3-2x_4=-t+1.\end{cases}$$

(1) 求解方程组（Ⅰ），用其对应的齐次线性方程组的基础解系表示通解；

(2) 当方程组（Ⅱ）中的参数 m,n,t 为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解？

分析 利用初等行变换判定出线性方程组（Ⅰ）的解的情况，并写出其通解. 将此解分别代入方程组（Ⅱ）的三个方程中，分别求出 m，n 和 t. 最后要特别注意验证方程组（Ⅱ）的通解与方程组（Ⅰ）的通解完全相同.

解 (1) 设方程组（Ⅰ）的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_1$、增广矩阵为 $\boldsymbol{B}_1$. 对 $\boldsymbol{B}_1$ 作初等行变换，得

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix}.$$

由于 $R(\boldsymbol{A}_1)=R(\boldsymbol{B}_1)=3<4$，所以方程组有无穷多解，且通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数}).\qquad(*)$$

(2) 将通解（*）式代入（Ⅱ）的第一个方程，得

$$(k-2)+m(k-4)-(2k-5)-k=-5,$$

解得 $m=2$；将通解(*)式代入（Ⅱ）的第二个方程，得

$$n(k-4)-(2k-5)-2k=-11,$$

解得 $n=4$；将通解(*)式 代入（Ⅱ）的第三个方程，得

$$(2k-5)-2k=-t+1,$$

解得 $t=6$. 因此，方程组（Ⅱ）的参数 $m=2$，$n=4$，$t=6$. 即当 $m=2$，$n=4$，$t=6$ 时，方程组（Ⅰ）的全部解都是方程组（Ⅱ）的解. 这时，方程组（Ⅱ）化为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=-5, \\ 4x_2-x_3-2x_4=-11, \\ x_3-2x_4=-5. \end{cases}$$

设方程组（Ⅱ）的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_2$、增广矩阵为 $\boldsymbol{B}_2$. 对 $\boldsymbol{B}_2$ 作初等行变换，得

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

于是，方程组（Ⅱ）的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (k \text{ 为任意常数})$$

显然，方程组（Ⅰ）(Ⅱ)的解完全相同，即方程组（Ⅰ）(Ⅱ）同解.

注 (1) 本题把(Ⅰ) 的特解$(-2,\ -4,\ -5,\ 0)^{\mathrm{T}}$代入(Ⅱ)中的三个方程，也可得 m，n，t 的值；

(2) 求得 m，n，t 后，必须验证（Ⅱ）的解为（Ⅰ）的解.

14 矩阵的特征值与特征向量的求法

14.1 解题方法

Ⅰ. 矩阵的特征值与特征向量的求法

(1) 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 是"抽象型"矩阵，即矩阵的元素没有具体给出的矩阵，求此类型矩阵的特征值、特征向量的基本方法是：

① 利用定义式 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，满足关系式的 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 为对应于 λ 的一个特征向量；

② 利用特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 求 λ，进而求对应的特征向量.

(2) 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 是"数值型"矩阵，即矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 全为常量的矩阵，则求此类型矩阵的特征值、特征向量的基本方法是：

① 求特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 的全部根，即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

② 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_i，求齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})x=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，那么该基础解系的所有非零线性组合就是对应于 λ_i 的全部特征向量.

Ⅱ. 矩阵的特征值的一些重要性质

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$；

(2) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$；

(3) 设 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $k\lambda$，$a\lambda+b$，λ^m，$\frac{1}{\lambda}$，$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 分别为 $k\boldsymbol{A}$，$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^m$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值（其中 k，a，b 均为常数，$m\in\mathbf{Z}^+$）.

一般地，若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. 其中

$$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m,\quad \varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m.$$

14.2 典型题解析

【例 14-1】 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1，1，2，则矩阵 $\boldsymbol{B}=(3\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ 的特征值为________.

(A) 1，-1，-2　　(B) $\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{3}$

(C) $-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，-1

分析　本题考查方阵特征值的性质. 可证明：若 λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

① λ^k 为 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值，一般地，$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_m\lambda^m$ 为 $\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$ 的特征值；

② $\frac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；(可证：若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均不为零)

③ $\frac{|A|}{\lambda}$为A^*的特征值．（条件：A可逆）

利用上面的结论①②③即可求出矩阵$B=(3A^*)^{-1}$的特征值.

因为矩阵A的特征值为-1，1，2，则A^*的特征值为2，-2，-1. 所以$3A^*$的特征值为6，-6，-3，从而$(3A^*)^{-1}$的特征值为$\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{3}$. 故应选(B).

解 应选(B)．

注 本题中所列举的性质应牢记．

【例 14-2】 设$\lambda=2$是非奇异矩阵A的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值等于________．

(A) $\frac{4}{3}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{4}$

分析 本题也是考查方阵特征值的性质. 利用例 14-1 中的结论①②即可求出矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$的特征值. 因为$\lambda=2$是非奇异矩阵$A$的一个特征值，则矩阵$\frac{1}{3}A^2$有一个特征值$\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$. 所以$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{4}$. 故应选(B).

解 应选(B).

【例 14-3】 设A是3阶矩阵，α_1，α_2，α_3是三维线性无关的列向量，且

$$A\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3,\ A\alpha_2=4\alpha_1-3\alpha_2+5\alpha_3,\ A\alpha_3=0.$$

求矩阵A的特征值和特征向量.

分析 本题属于抽象矩阵求特征值和特征向量的问题，应从特征值和特征向量的定义出发，根据所给条件进行计算.

解 由$A\alpha_3=0=0\cdot\alpha_3$知$\lambda=0$是$A$的特征值，$\alpha_3$是对应特征值$\lambda=0$的特征向量. 而由条件可知

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3,\ 4\alpha_1-3\alpha_2+5\alpha_3,\ 0)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&4&0\\-1&-3&0\\3&5&0\end{pmatrix},$$

记$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性无关知矩阵$P$可逆，进而$P^{-1}AP=B$，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&4&0\\-1&-3&0\\3&5&0\end{pmatrix}.$$

又因为矩阵B的特征多项式为

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&4&0\\-1&-3-\lambda&0\\3&5&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)^2,$$

所以矩阵B的特征值为-1，-1，0. 因为相似矩阵的特征值相同，故矩阵A的特征值也为

$-1, -1, 0.$

对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，因为

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&4&0\\-1&-2&0\\3&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

若 $\boldsymbol{B\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}$，即 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P\beta})=\lambda(\boldsymbol{P\beta})$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{P\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

因此，$k_1(-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，$k_2\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda=-1$ 和 $\lambda=0$ 的特征向量 $(k_1 k_2\neq 0)$.

注 本题中涉及如下有用的结论：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$（即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似）. 如果 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 λ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ，且对应的特征向量为 $\boldsymbol{Px}$.

【例 14-4】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量，其中，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

分析 本题应先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，再利用特征值与特征向量的概念计算 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(\lambda-1)^2$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=7$（由此知 $|\boldsymbol{A}|=1\times1\times7=7\neq0$）.

属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{是不全为零的常数}).$$

属于 $\lambda_3=7$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\beta}=k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(k_3\text{是不为零的常数}).$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则由 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}&=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2\right)(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

由此可见，$B+2E$ 的特征值为 $\mu=\frac{|A|}{\lambda}+2$，属于 μ 的特征向量为 $P^{-1}x$. 因此 $B+2E$ 有特征值 $\mu_1=\mu_2=9$，$\mu_3=3$.

属于 $\mu_1=\mu_2=9$ 的特征向量为

$$P^{-1}\alpha=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\left[k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,\ k_2\text{是不全为零的常数}).$$

属于 $\mu_3=3$ 的特征向量为

$$P^{-1}\beta=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad(k_3\text{是不为零的常数}).$$

注 本题中涉及如下有用的结论：设 A，B 都是 n 阶矩阵，且 $P^{-1}AP=B$（即 A 与 B 相似）. 如果 A 的特征值 λ 对应的特征向量为 x，则 B 有特征值 λ，且对应的特征向量为 $P^{-1}x$.

【例 14-5】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$. 又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0的一个特征向量为 $\alpha=(-1,\ -1,\ 1)^T$，求 a，b，c 和 λ_0的值.

分析 题设与伴随矩阵 A^* 有关，自然想到利用 $AA^*=A^*A=|A|E$ 进行化简. 另外，本题是求特征值的逆问题，且题设已知某特征向量，因此需要从特征值、特征向量的定义 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$ 着手分析.

解 根据题设可得 $AA^*=|A|E=-E$ 和 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$. 又因为 $AA^*\alpha=-E\alpha=-\alpha$，所以 $\lambda_0A\alpha=-\alpha$，即

$$\lambda_0\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

由此可得

$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1, & ①\\ \lambda_0(-5-b+3)=1, & ②\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1, & ③\end{cases}$$

由式①和 式③，解得 $\lambda_0=1$. 将 $\lambda_0=1$ 代入式②和式①，得 $b=-3$，$a=c$.

由 $|A|=-1$ 和 $a=c$，有

$$\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1,$$

故 $a=c=2$. 因此, $a=2$, $b=-3$, $c=2$, $\lambda_0=1$.

【例 14-6】 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=-1$ 所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

分析 本题是一个由矩阵的特征值、特征向量反求矩阵的问题.

解 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$.

所以, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i(i=1,2,3)$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\lambda_3\boldsymbol{p}_3)$, 从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\lambda_3\boldsymbol{p}_3)(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&1\\2&0&-2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注 本题中求 $\boldsymbol{P}^{-1}$有特殊的技巧: 因为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量两两正交, 且长度均为 3, 故 $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{P}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$为正交矩阵, 而正交矩阵的转置矩阵就是逆矩阵, 所以

$$3\boldsymbol{P}^{-1}=\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{P}\right)^{-1}=\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}.$$

【例 14-7】 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$, 对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(1,2,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,3,9)^{\mathrm{T}}$, 又向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$.

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$线性表示;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$ (n 为自然数).

分析 问题 (1) 由题设可以看出, 本质是解一个线性方程组. 问题 (2) 中的 $\boldsymbol{A}^n$通常是把 $\boldsymbol{A}$ 化为相似标准形, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$, 其中, $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 而 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$, 但利用 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i^n\boldsymbol{\xi}_i$去求会更方便些.

解 (1) 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+x_3\boldsymbol{\xi}_3$, 代入数值后得方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

得唯一解 $\boldsymbol{x}=(2,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$.

(2) 方法一：$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^n(2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$ 得 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i^n\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,3)$.

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}&=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3=2\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1-2\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2+\lambda_3^n\boldsymbol{\xi}_3\\&=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2\times2^n\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

方法二：令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$

15 方阵可相似对角化的条件与对角化方法

15.1 解题方法

Ⅰ. 方阵可相似对角化的条件

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，否则不可对角化.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可对角化.

(3) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个重特征值对应的线性无关的特征向量的个数等于该特征值的重数.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可对角化.

注 (2)中的条件仅仅是充分的.

Ⅱ. 方阵相似对角化的具体步骤

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

(2) 对每个 $\lambda_i (i=1, 2, \cdots, n)$，求齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，得 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$；

(3) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 对应的特征值.

15.2 典型题解析

【例 15-1】 已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 试确定参数 a, b 及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值；

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵？说明理由.

分析 本题是已知特征向量反求参数的问题，可以直接利用定义 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ 得到一个关于 λ, a, b 的方程组，由此可解出 λ, a 和 b；而 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵，更直接的判定方法是 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的重数 (≥2) 是否与其对应的线性无关的特征向量的个数一致.

解 (1) 由 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，得 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}2-1-2=\lambda,\\5+a-3=\lambda,\\-1+b+2=-\lambda,\end{cases}$

解得 $\lambda=-1$, $a=-3$, $b=0$.

(2) 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix},\quad |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3$$

知 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值. 而由 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2<3$ 知 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向

量只有一个，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

【例 15-2】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

分析 首先从 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式入手，利用有二重特征根确定 a 的值，然后算出二重特征根 λ_0，则由 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})$ 即可确定 $\boldsymbol{A}$ 可否相似对角化.

解

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-3\\-1&4-\lambda&-3\\1&a&5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&\lambda-2&0\\-1&4-\lambda&-3\\1&a&5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\-1&3-\lambda&-3\\1&a+1&5-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

下面分两种情形讨论 a 的值.

(1) 若二重特征根为 2，则 $(\lambda^2-8\lambda+18+3a)|_{\lambda=2}=0$，即 $a=-2$，此时另一个特征根为 $\lambda=6$. 于是得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&-2&5\end{pmatrix}$. 由于

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=1$，因此，属于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量有两个. 故此时 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

(2) 若二重特征根不为 2，则方程 $\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$ 应有重根，从而有 $(-8)^2-4(18+3a)=0$，即 $a=-\frac{2}{3}$. 此时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&-\frac{2}{3}&5\end{pmatrix}$，以及二重特征根为 $\lambda=4$. 由于

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&2&-3\\-1&0&-3\\1&-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}&1\\0&-\frac{2}{3}&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=2$，因此，属于 $\lambda=4$ 的线性无关的特征向量只有一个. 故此时 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

【例 15-3】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，试求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角形矩阵.

分析 题设A有三个线性无关的特征向量，隐含A可对角化，因此，对应于二重特征值$\lambda=2$，一定存在两个线性无关的特征向量，即$3-R(A-2E)=2$，从而有$R(A-2E)=1$. 由此可确定参数x，y. 至于求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角形矩阵，则是常规问题.

解 因为A有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是A的二重特征值，所以A对应于$\lambda=2$的线性无关的特征向量有两个，故$R(A-2E)=1$. 又因为

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\x&2&y\\-3&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2-x&x+y\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是$2-x=0$，$x+y=0$，解得$x=2$，$y=-2$. 即$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$.

再由特征值的性质$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+4+5$可知，第三个特征值$\lambda_3=6$.

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，解方程组$(A-2E)x=0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得对应的特征向量为$p_1=(-1,1,0)^T$，$p_2=(1,0,1)^T$.

对于特征值$\lambda_3=6$，解方程组$(A-6E)x=0$. 由

$$A-6E=\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得对应的特征向量为$p_3=(1,-2,3)^T$.

令$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则$P$可逆，且$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

【例 15-4】 设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问当$k$为何值时，存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角形矩阵？并求出$P$和相应的对角矩阵.

分析 本题相当于A可对角化的问题，即要求每个特征值的重数与对应的线性无关的特征向量的个数是一致的. 因此，应先求出A的特征值，再根据特征值的重数与对应线性无关的特征向量的个数相等，导出相应的$R(A-\lambda E)$应满足的条件，从而确定出k的值.

解 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\-k&-1-\lambda&k\\4&2&-3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-2\\0&\lambda+1&-k\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(1-\lambda)$$

知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$.

由题设知，对应于二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，必有两个线性无关的特征向量，因此有 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4&2&-2\\-k&0&k\\4&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&2&-2\\-k&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

由 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=1$ 知，必有 $k=0$. 此时

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=1$ 时

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-2&0\\4&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

16 实对称矩阵正交相似对角化的方法

16.1 解题方法

若$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵，则一定存在正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵，并可按照以下步骤求出正交矩阵$\boldsymbol{P}$：

(1) 求出方阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，其中，重数分别为$k_1, k_2, \cdots, k_s$；

(2) 对每一个λ_i，求出齐次方程组$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系$\boldsymbol{\xi}_{ik_1}, \boldsymbol{\xi}_{ik_2}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{ik_i}(i=1, 2, \cdots, s)$；

(3) 将$\boldsymbol{\xi}_{ik_1}, \boldsymbol{\xi}_{ik_2}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{ik_i}(i=1, 2, \cdots, s)$正交单位化（若$k_i=1$，则只需单位化），得正交单位特征向量组$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$；

(4) 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$，则$\boldsymbol{P}$为正交矩阵，且$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，其中，$\lambda_i$是特征向量$\boldsymbol{p}_i$所对应的特征值.

16.2 典型题解析

【例 16-1】 试求一个正交的相似变换矩阵，将对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$化为对角矩阵.

分析 本题是利用正交变换将对称矩阵化为对角阵的常规题型，也是非常重要的题型，所以必须要熟练掌握计算的步骤：

① 求特征值$\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$，即解方程$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$；

② 求每个特征值$\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$对应的线性无关的特征向量$\boldsymbol{\xi}_i(i=1, 2, \cdots, n)$；

③ 将n个线性无关的特征向量$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$正交规范化，即先正交化（只需对重特征根对应的线性无关的特征向量正交化，不同特征值对应的特征向量本身就是正交的），后单位化，得$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$；

④ 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$，则$\boldsymbol{P}$就是所求的一个正交矩阵，且使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

注 ① 对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的排列顺序要与$\boldsymbol{P}$中$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$的排列顺序相同；

② 所求的正交矩阵$\boldsymbol{P}$是不唯一的.

解 由于

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)-4(2-\lambda)+4\lambda$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-2$ 时, 解方程组 $(A+2E)x=\mathbf{0}$. 由

$$A+2E=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$, 对应于 $\lambda_1=-2$ 的单位特征向量为 $p_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=1$ 时, 解方程组 $(A-E)x=\mathbf{0}$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$, 对应于 $\lambda_2=1$ 的单位特征向量为 $p_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=4$ 时, 解方程组 $(A-4E)x=\mathbf{0}$, 由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -3 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 对应于 $\lambda_3=4$ 的单位特征向量为 $p_3=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

令

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

则 P 为正交矩阵, 且使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}.$$

【例 16-2】 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$是线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量；(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^{T}AQ=\Lambda$.

分析 (1) 由 A 的各行元素之和均为 3 以及 $Ax=0$ 的两个解可以确定出 A 的三个特征值及对应的特征向量；(2) 可用通常方法求出 Q 和 Λ.

解 (1) 由于 A 的各行元素之和均为 3，所以有 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 因此，$\lambda=3$ 是 A 的特征值，它对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$（其中，$k$ 是不为零的任意常数）.

由于线性方程组 $Ax=0$ 有两个解 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，所以有

$$A\alpha_1=0\alpha_1,\ A\alpha_2=0\alpha_2.$$

因此，$\lambda=0$ 是 A 的二重特征值，它对应的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$（其中，$k_1$，$k_2$ 是不全为零的任意常数）.

(2) 记 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 α_1，α_2，ξ_3 为 A 的三个特征向量，且 ξ_3 与 α_1，α_2 正交. 下面将 α_1，α_2 正交化：取 $\xi_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\xi_1]}{[\xi_1,\xi_1]}\xi_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 ξ_1，ξ_2，ξ_3 是正交向量组. 下面将它们单位化：

$$\beta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \beta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \beta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

因此，所求的正交矩阵为

$$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，且有 $Q^{T}AQ=\Lambda$.

注 本题的 (1) 是全题的关键，这里的特征值与特征向量是根据它们的定义和题设条

件直接得到的，要学会这种解题方法.

【例 16-3】 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且

$$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

（1）求 A 的所有特征值与特征向量；

（2）求矩阵 A.

分析 本题考查用定义法求特征值与特征向量，同时考查实对称矩阵的隐含信息：不同的特征值所对应的特征向量是正交的. 反求矩阵 A 也是常规题型.

解（1）因为 $R(A)=2$，所以 $|A|=0$，故 $\lambda=0$ 是 A 的特征值. 又因为

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以由定义知 $\lambda=1$ 是 A 的特征值，$\alpha_1=(1,0,1)^T$是 A 的属于 $\lambda=1$ 的特征向量；$\lambda=-1$ 是 A 的特征值，$\alpha_2=(1,0,-1)^T$是 A 的属于 $\lambda=-1$ 的特征向量.

设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$是 A 的属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量. 因为 A 是实对称矩阵，所以不同的特征值对应的特征向量相互正交，于是有 $\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\ \alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+x_3=0,\\ x_1-x_3=0,\end{cases}$ 解得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$. 故 A 的特征值为 1，-1，0，对应的特征向量依次为 $k_1(1,0,1)^T$，$k_2(1,0,-1)^T$，$k_3(0,1,0)^T$，其中，k_1，k_2，k_3均是不为零的任意常数.

（2）由 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,-\alpha_2,\mathbf{0})$，得

$$A=(\alpha_1,-\alpha_2,\mathbf{0})(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

17 用正交变换化二次型为标准形的方法

17.1 解题方法

用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形的主要步骤是：

(1) 写出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，注意对非平方项 $x_i x_j$ 的系数应取其一半作为 a_{ij}；

(2) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，即解方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$；

(3) 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求出 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$；

(4) 将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 正交规范化，即先正交化（只需对重特征值对应的线性无关的特征向量正交化，不同特征值对应的特征向量本身就是正交的），后单位化，便得到 n 个两两正交的单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$；

(5) 以 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 为列向量构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$，则二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，可化为标准形 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

17.2 典型题解析

【例 17-1】 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可以化成标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$ ________.

分析 本题利用 f 的两个表达式所对应的矩阵相似即可求出 a 的值.

因为 $f(x_1, x_2, x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ 与 $f=6y_1^2$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似，所以 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$，即 $3a=6$，所以 $a=2$.

解 应填 2.

注 也可按照如下方法求解：因 f 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f=6y_1^2$，由此可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 6，0，0，再由 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 知 $3a=6$，所以 $a=2$.

【例 17-2】 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

分析 (1) 首先写出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，然后按照常规方法求特征值；

(2) 由二次型的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，得出正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=0$. 由此说明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中应当有 2 个特征值为正，1 个特征值为零，从而可由 (1) 的结论得出符合要求的 a 值.

解 (1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$，由于特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}a-\lambda & 0 & 1\\ 0 & a-\lambda & -1\\ 1 & -1 & a-1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-\lambda & a-\lambda & 0\\ 0 & a-\lambda & -1\\ 1 & -1 & a-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a-\lambda & 0 & 0\\ 0 & a-\lambda & -1\\ 1 & -2 & a-1-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)\begin{vmatrix}a-\lambda & -1\\ -2 & a-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(a-\lambda)\begin{vmatrix}a-2-\lambda & a-2-\lambda\\ -2 & a-1-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)\begin{vmatrix}a-2-\lambda & 0\\ -2 & a+1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(a-\lambda)(a+1-\lambda)(a-2-\lambda).$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 a，$a+1$，$a-2$.

(2) 二次型的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=0$. 那么二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中应当有 2 个特征值为正，1 个特征值为零，所以必有 $a=2$.

【例 17-3】 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=4x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$.

(1) 用矩阵记号写出二次型 f;

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵;

(3) 求一个正交变换，把二次型化为标准形;

(4) 判别二次型的正定性.

分析 本题是用正交变换化二次型为标准形的常规题型，也是非常重要的题型，它相当于综合了所学的全部内容与方法，必须要熟练掌握求解过程.

解 (1) $f=(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

(2) 由于 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)=(2-\lambda)(4-\lambda)^2$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$，单位特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 恰好正交，否则需正交化）；单位特征

向量为 $\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

(3) 正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化二次型为标准形: $f=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$.

(4) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 4, 4, 全大于零, 故 f 是正定的.

【例 17-4】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$, 将 f 化为标准形.

分析 (1) 由 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$ 及 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$ 可得 $R(\boldsymbol{A})=2$, 由此可求出 a 的值;

(2) 由 (1) 的结论得出矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, 再按照常规方法求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$, 将 f 化为标准形.

解 (1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2, 即 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$.

因为 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$, 故 $R(\boldsymbol{A})=2$. 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换, 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&a&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-a-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故应有 $a=-1$.

(2) 当 $a=-1$ 时, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$. 由

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$$

可知矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0, 2, 6.

对于 $\lambda=0$, 解 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

对于 $\lambda=2$, 解 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$;

对于 $\lambda=6$, 解 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

由于实对称矩阵的特征值不同, 特征向量必相互正交, 故只需单位化:

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

则正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化 f 为标准形：$f=2y_2^2+6y_3^2$.

注 本题也可先求出 $A^TA=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{pmatrix}$，因为 A^TA 中有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1+a^2 \end{vmatrix}=2(1+a^2)\neq 0$，所以二次型 f 的秩为 $2 \Leftrightarrow |A^TA|=0$. 又因为

$$|A^TA|=(a+1)^2(a^2+3),$$

所以 $a=-1$. 当然，这样处理的计算量很大，不如利用结论 $R(A^TA)=R(A)$ 快捷.

【例 17-5】 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$$

的秩为 2.

(1) 求 a 的值；

(2) 求正交变换 $x=Qy$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形；

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

分析 (1) 由 f 的矩阵的行列式为零确定 a 的值；(2) 按照通常方法求 Q；(3) 根据 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形解方程.

解 (1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

由于 $|A|=-8a$，所以由 $R(A)=2$ 得 $|A|=0$，即 $a=0$.

(2) 由 (1) 得 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，于是，由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2$$

知 A 有特征值 $\lambda=0,2,2$，且属于 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$，属于 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\alpha_2=(1,1,0)^T$ 和 $\alpha_3=(0,0,1)^T$. 显然，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交. 下面将它们单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \beta_3=\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是，所求的正交矩阵为 $Q=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形，即 $f=0y_1^2+2y_2^2+2y_3^2=2y_2^2+2y_3^2$.

（3）由于 $0y_1^2+2y_2^2+2y_3^2=0$ 有解 $y_1=c$，$y_2=y_3=0$（其中，c 为任意常数），所以 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}c\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c}{\sqrt{2}}\\ -\frac{c}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},$$

即

$$x_1=k,\ x_2=-k,\ x_3=0\ （其中，k 为任意常数）.$$

注 将实对称矩阵用正交变换化为标准形是一种基本运算，应熟练掌握.

【例 17-6】 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$，求 a，b 的值和正交矩阵 P.

分析 由题设，本题相当于二次型

$$f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$$

通过正交变换化为标准形 $f=\eta^2+4\zeta^2$. 因此，前后两个二次型所对应的矩阵是相似的，而相似的矩阵具有相同的特征多项式，由此可求出 a，b，再按照常规方法可求出 P.

解 令 $f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$，$f(\xi,\eta,\zeta)=\eta^2+4\zeta^2$，则由题设知，前后两个二次型所对应的矩阵 $\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ 必相似，从而有

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & b & 1\\ b & a-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix},$$

即

$$(\lambda-1)^2(\lambda-a)-2b-(\lambda-a)-(\lambda-1)-b^2(\lambda-1)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4).$$

当 $\lambda=0$ 时，上式成为 $b^2-2b+1=0$，即 $b=1$.

当 $\lambda=1$ 时，上式成为 $a-2b=1$，即 $a=3$.

对应的特征值分别为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$，容易算出它们对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

它们两两正交，单位化得

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故所求的正交矩阵为

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

18 合同矩阵与二次型正定性的判别方法

18.1 解题方法

Ⅰ. 判别两个同阶矩阵合同的方法

(1) 定义法：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

(2) 实 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的正、负惯性指数.

Ⅱ. 判别二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 正定性的方法

(1) 用定义；

(2) f 的标准形中的 n 个系数全为正；

(3) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零；

(4) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于零；

(5) 正惯性指数 $p=n$；

(6) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，其中，$\boldsymbol{U}$ 是可逆矩阵.

18.2 典型题解析

【例 18-1】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ________.

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 不合同且不相似

分析 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\lambda^3(\lambda-4)=0$，知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 4，0，0，0. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 必能相似对角化，所以 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似.

作为实对称矩阵，当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，从而二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$有相同的正、负惯性指数. 因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 故本题应选(A).

解 应选(A).

注 (1) 本题的考查要点是判别两实对称矩阵相似与合同的充分条件：

① 两个同阶实对称矩阵相似$\Leftrightarrow$它们有相同的特征值及重数；

② 两个同阶实对称矩阵合同$\Leftrightarrow$它们有相同的秩及相同的正惯性指数.

(2) 实对称矩阵合同时不一定相似，但相似时一定合同.

【例 18-2】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ________.

(A) 合同，且相似　　(B) 合同，但不相似

(C)不合同，但相似　　(D) 既不合同，也不相似

分析 根据相似的必要条件：$\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$，易见 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 肯定不相似. 由此可排除选项(A)与(C). 而合同的充要条件是有相同的正惯性指数、负惯性指数，为此可以用特征值来加以判别. 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)^2$$

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为3，3，0. 故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=0$. 而二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数也为 $p=2$，负惯性指数 $q=0$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 故应选(B).

解 应选(B).

【例 18-3】 设 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，求 a 的值.

分析 本题二次型的矩阵具体给出，故只要按照顺序主子式全大于零即可确定 a 的值.

解 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，因为 f 正定，所以 $\boldsymbol{A}$ 正定. 于是有

$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}=1-a^2>0$ 及 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-a(5a+4)>0$，即 $-1<a<1$ 及 $-\frac{4}{5}<a<0$，从而得 $-\frac{4}{5}<a<0$.

【例 18-4】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的行列式大于1.

分析 由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵知，其全部特征值均大于零，从而矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的所有特征值均大于1，再由特征值的性质 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ 便可证得此题.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中，$\lambda_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因此

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} \lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1 \end{pmatrix},$$

在上式两端取行列式，得

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1) = |\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,$$

从而$|A+E|>1$.

【例 18-5】 设有n元二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2.$$

其中，$a_i(i=1, 2, \cdots, n)$为实数，试问：当$a_1, a_2, \cdots, a_n$满足何种条件时，二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为正定二次型？

分析 本题$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个完全平方和的表达式，因此，对于任意的$x_1, x_2, \cdots, x_n$，总有$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\geqslant 0$，而此式等号成立当且仅当表达式的$n$个括号项的各子表达式为零. 据此可找到二次型正定即$f>0$的条件：对于任意n个不全为零的$x_1, x_2, \cdots, x_n$，表达式n个括号项的子表达式不全为零，即n元齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0,\\ x_2+a_2x_3=0,\\ \cdots\cdots\\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0,\\ x_n+a_nx_1=0\end{cases}$

没有非零解. 该方程组只有零解的充要条件是系数行列式不为零.

解 由已知条件，对于任意的$x_1, x_2, \cdots, x_n$，有$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\geqslant 0$，其中，等号成立当且仅当$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0,\\ x_2+a_2x_3=0,\\ \cdots\cdots\\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0,\\ x_n+a_nx_1=0.\end{cases}$ 而此齐次线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n,$$

故当$1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$时，对于任意的不全为零的$x_1, x_2, \cdots, x_n$，总有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)>0,$$

即当$1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$时，二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为正定二次型.

【例 18-6】 设$\boldsymbol{A}$为m阶实对称矩阵且正定，$\boldsymbol{B}$为$m\times n$实矩阵，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{B}$的转置矩阵，试证：$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$为正定矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{B}$的秩$R(\boldsymbol{B})=n$.

分析 由于$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$为抽象矩阵，判定其正定性，无法从顺序主子式全大于零得到结论. 这类问题一般要从定义（即对应的二次型为正定二次型）或其特征值全大于零这两方面去分析. 而求特征值要求知道抽象矩阵满足一定的矩阵关系式，本题无此类条件，因此求解本题的基本方法只能是定义法.

证明 必要性. 设$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$为正定矩阵，则对任意的实$n$维列向量$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$，即$(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$. 于是$\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$，因此$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$只有零解，从而$R(\boldsymbol{B})=n$.

充分性. 因为$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$，故$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$为实对称矩阵. 若$R(\boldsymbol{B})=n$，

则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 只有零解，从而对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，有 $\boldsymbol{Bx}\neq\mathbf{0}$. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以对于 $\boldsymbol{Bx}\neq\mathbf{0}$，有 $(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$. 于是，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.

【例 18-7】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

分析 易知 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，由于对抽象矩阵 $\boldsymbol{B}$ 无法用其顺序主子式来判定其正定性，只能通过证明其特征值全大于零或用定义来判定，而求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值要求 $\boldsymbol{B}$ 满足一定的关系式，本题无此假设，剩下就只能用定义了，即证明 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 为正定二次型即可.

证明 因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵. 对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}).$$

当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$，$(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})\geqslant0$. 因此，当 $\lambda>0$ 时，对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})>0,$$

即 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

第二部分 概率统计

19 随机事件的关系与抽象事件的概率计算

19.1 解题方法

“随机事件”与“概率”是概率论中两个最基本的概念，掌握随机事件的四种关系［子事件、相等（等价）事件、互不相容（互斥）事件、互逆（对立）事件］、三种运算［和（并）事件、积（交）事件、差事件］，并牢记事件的运算律（如德·摩根定律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$）及计算随机事件概率的几个主要公式是计算的关键.

计算随机事件概率有如下几个主要公式.

（1）加法公式：

① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

特别地，当 A，B 互不相容时，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

② $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

（2）减法公式：

若 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

一般地，有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

（3）逆事件的概率公式：$P(\bar{A})=1-P(A)$.

19.2 典型题解析

【例 19-1】 以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\bar{A}$ 为________.

（A）“甲种产品滞销，乙种产品畅销”　（B）“甲、乙两种产品均畅销”

（C）“甲种产品滞销”　（D）“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

分析　本题为事件关系的计算题. 设 $B=$“甲种产品畅销”，$C=$“乙种产品滞销”. 则 $A=BC$，$\bar{A}=\overline{BC}=\bar{B}\cup\bar{C}=$“甲种产品滞销或乙种产品畅销”. 故应选(D).

解　应选（D）.

【例 19-2】 对于任意两事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是________.

（A）$A\subset B$　（B）$\bar{B}\subset\bar{A}$　（C）$A\bar{B}=\varnothing$　（D）$\bar{A}B=\varnothing$

分析 本题考查对随机事件的概念和运算性质的理解，为了便于分析，可以画图进行说明. 因为 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow \bar{B}\subset\bar{A}\Leftrightarrow A\bar{B}=\varnothing$，所以正确的选项为(D).

解 应选 (D).

注 本题也可以用举例说明的方法找到正确答案. 如考虑样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1\}$，$B=\{1,2\}$，满足 $A\cup B=B$，则有 $A\subset B$，$\bar{B}\subset\bar{A}$，$A\bar{B}=\varnothing$ 均成立，但 $\bar{A}B=\{2\}\neq\varnothing$. 因此，与 $A\cup B=B$ 不等价的为(D). 当然，这只是一种解题技巧，并不是真正的证明.

【例 19-3】 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是________.

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容　　(B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

分析 根据题设，A 和 B 是任意两个不相容事件，$AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$. 所以

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A),$$

故(D) 为正确答案. 另外，由于 $P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，(C) 项不可能成立. 值得注意的是 (A) (B) 两项，有人认为(A) 与(B) 是互逆的，总有一个是正确的. 实际上，当 $AB=\varnothing$，$A\cup B\neq S$ (S 为样本空间) 时，(A) 不成立；当 $AB=\varnothing$，且 $A\cup B=S$ 时，(B) 项不成立.

解 应选(D).

【例 19-4】 已知 A，B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\,\bar{B})$，且 $P(A)=\frac{3}{5}$，则 $P(B)=$________.

分析 本题为抽象事件的概率计算题，只需利用德·摩根定律、逆事件的概率公式及加法公式进行计算即可.

由

$$P(AB)=P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

得

$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

解 应填 $\frac{2}{5}$.

【例 19-5】 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，则 A，B，C 全不发生的概率为________.

分析 本题是求概率 $P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})$，可利用德·摩根定律、逆事件的概率公式及加法公式进行计算即可. 因为 $ABC\subset AB$，所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，故 $P(ABC)=0$. 于是

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\frac{3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

解 应填 $\frac{7}{12}$.

【例 19-6】 设 X 和 Y 为两个随机变量，且

$$P\{X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7},$$

$$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7},$$

则 $P\{\max\{X,\ Y\}\geqslant 0\}=$ ________.

分析 本题先将事件$\{\max\{X,\ Y\}\geqslant 0\}$转化为等价事件$\{X\geqslant 0\}$或$\{Y\geqslant 0\}$，再运用概率的加法公式进行计算.

$$\begin{aligned}P\{\max\{X,\ Y\}\geqslant 0\}&=P\{X\geqslant 0\text{ 或 }Y\geqslant 0\}\\&=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0\}\\&=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

解 应填 $\frac{5}{7}$.

【例 19-7】 掷 n 颗骰子，求出现最大的点数为 5 的概率.

分析 本题不管是直接计算还是从对立事件着手进行计算都是比较复杂的，但利用差事件计算则是简捷的.

解 设 $A=$“最大的点数为 5”，$B=$“最大的点数不超过 5”，$C=$“最大的点数不超过 4”，则易见 $C\subset B$，且 $A=B-C$. 每颗骰子可能出现的点数均为 1，2，3，4，5，6，于是基本事件总数为 6^n，事件 B 中所含基本事件数为 5^n，事件 C 中所含基本事件数为 4^n，所求概率为

$$P(A)=P(B-C)=P(B)-P(C)=\frac{5^n}{6^n}-\frac{4^n}{6^n}=\frac{5^n-4^n}{6^n}.$$

20 古典概型与几何概型中随机事件概率的计算方法

20.1 解题方法

（1）具有以下两个特点的试验，称为古典概型（或等可能概型）：

① 试验的样本空间 S 只包含有限个元素，即 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$；

② 每个基本事件发生的可能性相同，即 $P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$.

（2）计算古典概型中事件 A 发生的概率，其要点是：先恰当地选取样本空间 S，并计算 S 中所含的基本事件总数 n，再计算导致事件 A 发生的基本事件个数 k（即 A 包含的基本事件个数），从而在古典概型中，事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}.$$

需要指出的是，排列组合方法在计算古典概型事件的概率中起着重要的作用，但同时它也是一个难点，所以不应占用过多的注意力，而应将重点放在对随机事件概率概念的理解和性质的掌握上.

（3）几何概型中事件概率的计算公式为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{A\text{ 的几何度量}}{S\text{ 的几何度量}}.$$

计算几何概型中事件的概率，难点在于模型化，即如何将一个实际问题转化为数学问题，这需要不断地积累经验.

20.2 典型题解析

【例 20-1】 $m+n$ 个产品中有 m 个次品和 n 个正品，从中无放回地随机逐个抽取测试，试求下列事件的概率：

（1）前 l 次抽得的产品中，只有一个次品（$l\leqslant n+1$）；

（2）第一个次品在第 l 次抽取时被发现（$l\leqslant n+1$）；

（3）最后一个次品在最后一次抽取中才被发现；

（4）m 个次品被连续地抽取发现；

（5）已知第一次抽到的是正品，第一个次品在第 l 次抽取时被发现（$1<l\leqslant n+1$）.

分析 这是一道典型的古典概型题．在解古典概型的题目时，主要的困难是正确地求出符合条件的各种可能性的个数，要避免漏算和重复计算.

解（1）前 l 次抽取的产品是由 $l-1$ 个正品和 1 个次品所组成的，故所求概率为

$$P_1=\frac{C_n^{l-1}C_m^1}{C_{m+n}^l}\quad(l\leqslant n+1).$$

（2）第一个次品在第 l 次抽取时被发现，意味着前 $l-1$ 次抽取的都是正品，故所求概率为

$$P_2 = \frac{A_n^{l-1}A_m^1}{A_{m+n}^l} \quad (l \leqslant n+1).$$

(3) 最后一个次品在最后一次抽取中才被发现，意味着前 $m+n-1$ 次抽取的是全部正品和 $m-1$ 个次品，故所求概率为

$$P_3 = \frac{C_n^n C_m^{m-1}}{C_{m+n}^{m+n-1}} = \frac{m}{m+n}.$$

(4) m 个次品被连续地抽取发现，这一事件只能在由 n 个正品所产生的 $n+1$ 个“间隔”中发生，所以其概率为

$$P_4 = \frac{n+1}{C_{m+n}^n}.$$

(5) 对比 (2)，“第一次抽到的是正品”这个条件已包含在“第一个次品在第 l 次抽取时被发现 $(1 < l \leqslant n+1)$”中，因此所求概率同 (2)，得

$$P_5 = \frac{A_n^{l-1}A_m^1}{A_{m+n}^l} \quad (1 < l \leqslant n+1).$$

【例 20-2】（抽签原理） 袋中有 50 个乒乓球，其中，20 个是黄球，30 个是白球. 两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是 ________ .

分析 令 A_i =“第 i 个人取得黄球”$(i=1, 2)$，则根据“抽签原理”可以直接得到

$$P(A_2) = P(A_1) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

本题也可以利用全概率公式计算：令 A_i =“第 i 个人取得黄球”$(i=1, 2)$，则

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) \\ &= \frac{20}{50}\times\frac{19}{49} + \frac{30}{50}\times\frac{20}{49} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

解 应填 $\frac{2}{5}$.

注 “抽签原理”是：设盒中有 n 张签，其中 $m(m<n)$ 张有奖. $k(k<n)$ 个人顺序地抽签，每个人抽一张，抽出后不放回，则每个人中奖的概率相等.

【例 20-3】（球在盒中的分布问题） 将 n 个球随机地放入 $N(N \geqslant n)$ 个盒子中去，并设盒子的容量不限. 试求下列事件的概率：A =“某指定的一个盒子中没有球”；B =“某指定的 n 个盒子中各有一个球”；C =“恰有 n 个盒子中各有一个球”；D =“某指定的一个盒子中恰有 m 个球$(m \leqslant n)$”；E =“恰有一个盒子中有 m 个球$(m \leqslant n)$”.

分析 将“n 个球随机地放入 N 个盒子中”作为一次试验，每种放法为一个基本事件. 由于每个球被放入 N 个盒子中都有 N 种不同的放法，故由乘法定理知，每次试验中共有 N^n 种不同的放法，即该试验的样本空间中共有 N^n 个基本事件. 下面分别求事件 A, B, C, D, E 中所包含的基本事件数 k_A, k_B, k_C, k_D, k_E.

(1) 对于事件 A，可设想将指定的那一个盒子拿出，这样一来，该问题就变成了将 n 个球随机地放入 $N-1$ 个盒子中，共有$(N-1)^n$种不同的放法，即 $k_A=(N-1)^n$.

(2) 对于事件 B，选出指定的 n 个盒子，则第一个球共有 n 种不同的放法，第二个球共有 $n-1$ 种不同的放法，…，第 n 个球共有 1 种放法，故由乘法定理知，共有 $n!$ 种不同的放

法，即 $k_B=n!$.

（3）对于事件 C，因 n 个盒子未指定，先从 N 个盒子中选出 n 个盒子，共有 C_N^n 种不同的选法，而对于固定的一种选法，即对于指定的 n 个盒子中各有一个球，共有 $n!$ 种不同的放法，故由乘法定理知，$k_C=C_N^n\,n!$.

（4）对于事件 D，应从 n 个球中先选出 m 个球放入指定的那一个盒子中，共有 C_n^m 种不同的选法，再将剩余的 $n-m$ 个球放入剩下的 $N-1$ 个盒子中，共有 $(N-1)^{n-m}$ 种不同的放法，故由乘法定理知，$k_D=C_n^m(N-1)^{n-m}$.

（5）对于事件 E，因该盒子未指定，可先从 N 个盒子中选出一个盒子，共有 C_N^1 种不同的选法，再按照（4）中的分析过程，即可求得 $k_E=C_N^1\,C_n^m(N-1)^{n-m}$.

解
$$P(A)=\frac{k_A}{N^n}=\frac{(N-1)^n}{N^n};$$
$$P(B)=\frac{k_B}{N^n}=\frac{n!}{N^n};$$
$$P(C)=\frac{k_C}{N^n}=\frac{C_N^n\,n!}{N^n};$$
$$P(D)=\frac{k_D}{N^n}=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n};$$
$$P(E)=\frac{k_E}{N^n}=\frac{C_N^1\,C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

注 许多实际问题都可以归结为例 20-3 所讲的“球在盒中的分布问题”，只是在应用时，应注意搞清谁是盒子，谁是球.

【例 20-4】（配对问题） 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的概率.

分析 本题是一个古典概型问题. 设 A =“4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双”，则 $\bar{A}$ =“4 只鞋子均不成双”.

① 若考虑取鞋次序，则试验的基本事件总数为 A_{10}^4. 对于事件 $\bar{A}$，第一只鞋子可从 5 双（10 只）中任取 1 只，有 10 种取法；第二只鞋子从剩下的 4 双（8 只）中任取 1 只，有 8 种取法；以此类推，$\bar{A}$ 中包含的基本事件数为 $10\times8\times6\times4$，从而可计算 $P(\bar{A})$ 及 $P(A)$.

② 若不考虑取鞋次序，则试验的基本事件总数为 C_{10}^4. 对于 $\bar{A}$，先从 5 双不同的鞋子中任取 4 双，共有 C_5^4 种取法；再从每双中任取 1 只，共有 $2\times2\times2\times2=2^4$ 种不同的取法. 故 $\bar{A}$ 中包含的基本事件数为 $C_5^4\times2^4$，从而可计算 $P(\bar{A})$ 及 $P(A)$.

解 设 A =“4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双”，则 $\bar{A}$ =“4 只鞋子均不成双”.

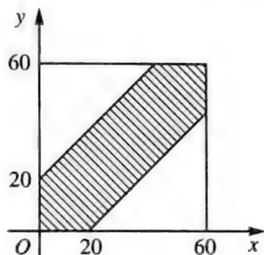
方法一：
$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{A_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

方法二：
$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_5^4\times2^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

【例 20-5】（会面问题） 两人相约 7 点到 8 点间在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时就可离去. 设两人的到达时刻在 7 点到 8 点间都是随机的且等可能的，试求这两人能会面的概率.

分析 本题是一道几何概率问题. 由于两人到达的时间是一对数，是二维实数，故可将两人会面问题转化成一个数学问题.

解 以 x，y 分别表示两人到达的时刻，事件 A 表示"两人能会面"，则会面的充要条件为 $|x-y|\leqslant 20$. 因此，可能的结果全体是边长为 60 的正方形里的点，能会面的点的区域为右图中的阴影部分，故所求概率为

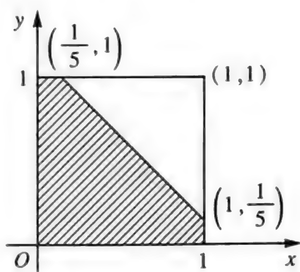


$$p=P(A)=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

【例 20-6】 若在区间 $(0,\ 1)$ 内任取两个数，则事件"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"的概率为________.

分析 这是一道几何概型问题，解题的关键是如何把它转化为几何概率的问题.

以 x，y 表示在区间 $(0,\ 1)$ 中随机地取得的两个数，若把 $(x,\ y)$ 看作平面直角坐标系的一个点，则这些点的全体是如右图所示的正方形，而事件"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"便是正方形中满足不等式 $x+y<\frac{6}{5}$ 的点的全体，即右图中的阴影部分.



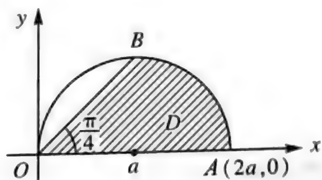
根据几何概率的定义，所求概率即为图中阴影部分的面积与边长为 1 的正方形的面积之比，即

$$P\left\{x+y<\frac{6}{5}\right\}=\frac{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1}=\frac{17}{25}.$$

解 应填 $\frac{17}{25}$.

【例 20-7】 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________.

分析 本题考查几何概率的定义和计算. 应将"原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$"与平面区域联系起来. 如右图所示，由 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ 所确定的区域是上半圆. 过原点 O 作线段 OB，使其与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. 事件"投点和原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$"等价于事件"投点落在图中的阴影部分即区域 D 内"，所



以,由几何概率的定义知,所求概率为

$$P=\frac{S_D}{S_{半圆}}=\frac{2}{\pi a^2}\cdot S_D=\frac{2}{\pi a^2}\cdot\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi a^2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

解 应填 $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

21 条件概率的计算与乘法定理的应用

21.2 解题方法

条件概率在不具有独立性的场合扮演着重要的角色. 条件概率 $P(B|A)$ 是指在已知事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率. 此时, A, B 之间在时间上一定有"先后"关系或在逻辑上有"主从"关系.

计算的法通常有两种: 一是直接利用定义; 二是利用"缩减样本空间"的方法.

乘法公式可以将很复杂的事件的概率计算转化为简单事件的概率乘积.

(1) 条件概率的计算公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad [P(A)>0].$$

(2)乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A),\quad [P(A)>0];$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B),\quad [P(B)>0].$$

① 设 A, B, C 为事件, 且 $P(AB)>0$, 则

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

② 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件 ($n\geqslant 2$), 且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

21.2 典型题解析

【例 21-1】 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C})=$ ________.

分析 由于 A 与 C 互不相容, 所以 $AC=\varnothing$, $ABC=\varnothing$, 从而 $P(ABC)=0$. 于是

$$P(AB|\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

解 应填 $\frac{3}{4}$.

【例 21-2】 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B)>0$, $P(A|B)=1$, 则必有________.

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$

分析 本题可直接根据加法公式及乘法公式, 并利用题设条件 $P(A|B)=1$ 判断即可.

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A|B)P(B)\\&=P(A)+P(B)-P(B)=P(A).\end{aligned}$$

解 应选(C).

【例 21-3】 设A, B是两个随机事件，且$0<P(A)<1$, $P(B)>0$, $P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有 ________.

(A) $P(A|B)=P(\bar{A}|B)$　　(B) $P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

分析 根据条件概率的定义，对题设$P(B|A)=P(B|\bar{A})$进行变形即可. 因为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\ P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

于是由$P(B|A)=P(B|\bar{A})$得，$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，整理得$P(AB)=P(A)P(B)$. 可见本题应选(C).

解 应选(C).

【例 21-4】 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为0.6和0.5，现已知目标被击中，则它是甲射中的概率为 ________.

分析 本题为条件概率的计算题，只需利用计算条件概率的公式及独立性即可.

设A="甲击中目标"，B="乙击中目标"，则所求概率为

$$P(A|A\cup B)=\frac{P[A(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times 0.5}=0.75.$$

解 应填0.75.

【例 21-5】 设10件产品中有4件不合格品，从中任取两件. 已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为 ________.

分析 依题意，可设事件A="有一件是不合格品"，B="另一件也是不合格品"，则所求的概率应是条件概率$P(B|A)$. 求$P(B|A)$有两种方法.

方法一：利用定义：$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

把任取两件产品作为一次试验，则该试验的样本空间中包含的基本事件总数为C_{10}^2. 因为AB="任取两件都为不合格品"，AB中包含的基本事件数为C_4^2，故$P(AB)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$.

又因为$\bar{A}$="两件均为合格品"，$\bar{A}$中包含的基本事件数为C_6^2，故$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}$. 所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$.

方法二：利用缩减样本空间法.

把A视为"样本空间"，对所取产品不考虑先后次序. 导致事件A发生的事件共有两类：① 两件产品都是不合格品；② 两件产品中一件是不合格品，另一件是合格品. 包含的基本事件数分别为C_4^2, $C_4^1C_6^1$，则A中包含的基本事件数为$C_4^2+C_4^1C_6^1$. 而AB中包含的基

本事件数为 C_4^2，并且 AB 中的基本事件都在 A 中，故 $P(B|A)=\dfrac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}=\dfrac{1}{5}$.

解 应填 $\dfrac{1}{5}$.

【例 21-6】 袋中放有 a 个白球和 b 个黑球，随机地取出一个，然后放回，并同时再放进与取出的球同色的球 c 个，再取第二个，这样连续取 3 次，问取出的 3 个球中前 2 个是黑球、第 3 个是白球的概率是多少？

分析 若记 A_i = "第 i 次取到黑球"$(i=1,2,3)$，则本题为求概率 $P(A_1A_2\bar{A}_3)$，显然，利用乘法公式计算简单.

解 记 A_i = "第 i 次取到黑球"$(i=1,2,3)$. 由题设，有

$$P(A_1)=\frac{b}{a+b},$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{b+c}{a+b+c},$$

$$P(\bar{A}_3|A_2A_1)=\frac{a}{a+b+2c}.$$

于是，由乘法定理得所求事件 $A_1A_2\bar{A}_3$ 的概率为

$$P(A_1A_2\bar{A}_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)$$
$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c}.$$

22 利用全概率公式与贝叶斯公式计算随机事件概率的方法

22.1 解题方法

全概率公式是很重要的一个计算公式，掌握利用全概率公式和贝叶斯公式的条件与场合是非常重要的.

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$ 中体现的思想是分解，即把复杂事件 A 分解成简单事件之和的形式. 使用全概率公式的问题，一般都有两个层次：第一个层次是原因事件，第二个层次是结果事件. 在全概率公式中，诸 B_i 便是原因事件，A 是结果事件. 全概率公式处理的一般都是"由原因索结果"的问题.

贝叶斯（Bayes）公式 $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(A)}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 有时称为后验概率公式，它实际上是条件概率，是在已知结果发生的情况下，求导致结果的某种原因的可能性的大小. 比如求 $P(B_1\mid A)$，当 $P(A)$（常用全概率公式计算），$P(B_1)$，$P(A\mid B_1)$ 较易求得时，就要用贝叶斯公式，处理的问题恰好是"由结果追原因".

全概率公式与贝叶斯公式使用的关键是要找到导致事件 A 发生的完备事件组 B_1，B_2，$\cdots$，B_n.

22.2 典型题解析

【例 22-1】 从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 X，再从 1，$\cdots$，X 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$________.

分析 本题显然是利用全概率公式计算的问题. $\{Y=2\}$ 是结果，$\{X=i\}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 是所有的原因事件.

$$\begin{aligned}P\{Y=2\}&=P\{X=1\}\cdot P\{Y=2\mid X=1\}+P\{X=2\}\cdot P\{Y=2\mid X=2\}+\\&\quad P\{X=3\}\cdot P\{Y=2\mid X=3\}+P\{X=4\}\cdot P\{Y=2\mid X=4\}\\&=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{48}.\end{aligned}$$

解 应填 $\dfrac{13}{48}$.

【例 22-2】 第一个盒子中装有 5 个红球和 4 个白球；第二个盒子中装有 4 个红球和 5 个白球. 先从第一个盒子中任取 2 个球放入第二个盒中去，然后从第二个盒子中任取 1 个球. 求取到白球的概率.

分析 本题显然也是利用全概率公式计算的问题. "从第二个盒子中取到白球"是结果，而"从第一个盒子中取到 i 个白球（$i=0, 1, 2$）"是所有的原因事件.

解 设 B_i ="从第一个盒子中取到 i 个白球"（$i=0, 1, 2$），A ="从第二个盒子中取到白球"，则

$$P(B_0)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18},\ P(B_1)=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}=\frac{10}{18},\ P(B_2)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{3}{18};$$

$$P(A|B_0)=\frac{5}{11},\ P(A|B_1)=\frac{6}{11},\ P(A|B_2)=\frac{7}{11}.$$

于是，由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{5}{18}\times\frac{5}{11}+\frac{10}{18}\times\frac{6}{11}+\frac{3}{18}\times\frac{7}{11}=\frac{53}{99}.$$

【例 22-3】 设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1；一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机查看 4 只，若无残次品，则买此箱玻璃杯，否则不买. 求：

(1) 顾客买此箱玻璃杯的概率 α；

(2) 在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率 β.

分析 (1) 利用全概率公式计算；(2) 利用贝叶斯公式计算.

解 设 A =“顾客买下所查看的一箱玻璃杯”，B_i =“箱中恰好有 i 件残次品”($i=0,1,2$).

由题设

$$P(B_0)=0.8,\ P(B_1)=0.1,\ P(B_2)=0.1.$$

$$P(A|B_0)=1,\ P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},\ P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}.$$

(1) 由全概率公式，得

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx0.94;$$

(2) 由贝叶斯公式，得

$$\beta=P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times1}{0.94}\approx0.85.$$

【例 22-4】 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中，女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出 2 份.

(1) 求先抽取的 1 份是女生表的概率 p；

(2) 已知后抽到的 1 份是男生表，求先抽到的 1 份是女生表的概率 q.

分析 (1) 应用全概率公式；(2) 计算的是条件概率.

解 (1) 记事件 B_j =“第 j 次抽到的报名表是女生表”($j=1,2$)，A_i =“报名表是第 i 个地区的”($i=1,2,3$). 易见，A_1，A_2，A_3构成了一个完备事件组，且

$$P(A_i)=\frac{1}{3}处(i=1,2,3),\ P(B_1|A_1)=\frac{3}{10},\ P(B_1|A_2)=\frac{7}{15},\ P(B_1|A_3)=\frac{5}{25}.$$

(1) 应用全概率公式，得

$$p=P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1|A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$$

(2) $q=P(B_1|\bar{B}_2)$. 需先计算概率 $P(B_1\bar{B}_2)$与 $P(\bar{B}_2)$. 对事件 $B_1\bar{B}_2$再次用全概率公式，得

$$P(B_1\bar{B}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1\bar{B}_2|A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}\right)=\frac{20}{90},$$

而由“抽签原理”可知，$P(\bar{B}_2)=P(\bar{B}_1)=\frac{61}{90}$，故

$$q=P(B_1|\bar{B}_2)=\frac{P(B_1\bar{B}_2)}{P(\bar{B}_2)}=\frac{\frac{20}{90}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}.$$

注 如果没有想到“抽签原理”，则需要再次应用全概率公式计算 $P(\bar{B}_1\bar{B}_2)$，再用加法公式求出 $P(\bar{B}_2)$：

$$P(\bar{B}_1\bar{B}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\bar{B}_1\bar{B}_2|A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{8}{15}\times\frac{7}{14}+\frac{20}{25}\times\frac{19}{24}\right)=\frac{41}{90},$$

$$P(\bar{B}_2)=P(B_1\bar{B}_2)+P(\bar{B}_1\bar{B}_2)=\frac{61}{90}.$$

【例 22-5】 设有三门火炮同时对同一架飞机射击，命中率分别为 0.2，0.3，0.5，飞机被命中一发而被击毁的概率为 0.2，被命中两发而被击毁的概率为 0.6，被命中三发而被击毁的概率为 0.9. 求三门火炮在一次射击中击毁飞机的概率.

分析 本题也属应用全概率公式求解的题型，同时依题中的实际情况，注意到三门火炮对飞机射击是相互独立的.

解 设 A =“三门火炮在一次射击中击毁飞机”，B_i =“飞机被命中 i 发炮弹”($i=0, 1, 2, 3$)，A_j =“第 j 门火炮命中飞机”($j=1, 2, 3$)，则 $P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_3)=0.5$，且 A_1，A_2，A_3 相互独立．因为

$$B_0=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3,\ B_1=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3,$$

$$B_2=A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3,\ B_3=A_1A_2A_3.$$

又因为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$，$\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$，$\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 两两互斥，$A_1A_2\bar{A}_3$，$A_1\bar{A}_2A_3$，$\bar{A}_1A_2A_3$ 两两互斥，从而

$$P(B_0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=0.8\times0.7\times0.5=0.28,$$

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)\\&=0.2\times0.7\times0.5+0.8\times0.3\times0.5+0.8\times0.7\times0.5=0.47,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B_2)&=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)\\&=0.2\times0.3\times0.5+0.2\times0.7\times0.5+0.8\times0.3\times0.5=0.22,\end{aligned}$$

$$P(B_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.2\times0.3\times0.5=0.03,$$

$$P(A|B_0)=0,\ P(A|B_1)=0.2,\ P(A|B_2)=0.6,\ P(A|B_3)=0.9.$$

故由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.28\times0+0.47\times0.2+0.22\times0.6+0.03\times0.9\\&=0.253.\end{aligned}$$

23 相互独立的随机事件概率的计算

23.1 解题方法

随机事件的独立性是概率论中应用最广泛的一个重要概念，掌握其定义、性质、判别方法及应用是本部分的要点.

Ⅰ. 独立性的定义

(1) 称事件 A 与 B 相互独立，如果它们满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$.

(2) 称三个事件 A, B, C 相互独立，如果它们满足下面四个等式:

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

如果 A, B, C 仅满足以上前三个等式，则称 A, B, C 两两独立.

(3) 称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，如果它们中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件的积事件的概率都等于各事件概率的乘积.

Ⅱ. 独立性的性质

(1) 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$ 、$\bar{A}$ 与 B、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则它们中的任何一部分事件也相互独立.

Ⅲ. 独立性的判定

(1) 直观性判定（实际推断）：若试验独立，则其结果必相互独立.

(2) 充要条件:

① A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

$$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A) \quad [P(B)>0]$$
$$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B) \quad [P(A)>0]$$

② n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立$\Leftrightarrow$它们中的任意多个事件换成它们各自的对立事件后，所得到的 n 个事件仍相互独立.

Ⅳ. 独立性的应用

相互独立的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少发生一个，其概率的计算公式为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n).$$

Ⅴ. 二项概率公式

n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \cdots, n).$$

23.2 典型题解析

【例 23-1】 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生而 B 不发生的概率与 B 发生而 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________.

分析 利用事件独立性的概念及事件概率的计算公式即可.

由题设知

$$P(\bar{A}\,\bar{B})=\frac{1}{9}, \quad ①$$

$$P(A\bar{B})=P(\bar{A}\,B), \quad ②$$

由于 A 和 B 相互独立，必有 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 相互独立，故由①式得

$$P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=\frac{1}{9}, \quad ③$$

由②式得 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，即 $P(A)=P(B)$. 从而

$$P(\bar{A})=P(\bar{B}), \quad ④$$

将④式代入③式得 $P(\bar{A})=\frac{1}{3}$，因此，$P(A)=\frac{2}{3}$.

解 应填 $\frac{2}{3}$.

【例 23-2】 设两两相互独立的事件 A，B 和 C 满足条件：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$ ________.

分析 利用概率的加法公式和事件独立的概念即可. 因为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

由题设知

$$\begin{aligned}
&P(A)=P(B)=P(C),\\
&P(AB)=P(A)P(B)=[P(A)]^2,\\
&P(AC)=P(A)P(C)=[P(A)]^2,\\
&P(BC)=P(B)P(C)=[P(A)]^2,\\
&P(ABC)=0.
\end{aligned}$$

因此有 $\frac{9}{16}=3P(A)-3[P(A)]^2$，即 $[P(A)]^2-P(A)+\frac{3}{16}=0$. 解此方程得 $P(A)=\frac{1}{4}$ 或 $P(A)=\frac{3}{4}$. 又由题设知 $P(A)<\frac{1}{2}$，故 $P(A)=\frac{1}{4}$.

解 应填 $\frac{1}{4}$.

注 题中去掉 $P(A)<\frac{1}{2}$ 的条件仍可得到 $P(A)=\frac{1}{4}$. 这是因为，如果 $P(A)=\frac{3}{4}$，则得矛盾式 $\frac{3}{4}=P(A)\leqslant P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$. 但是加上条件 $P(A)<\frac{1}{2}$，可直接排除 $P(A)=\frac{3}{4}$，使问题的难度减小.

【例 23-3】 设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为 ________.

分析 若直接由已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$ 去求解本题，则要考虑可能出现一

次、两次、三次等情况，计算量大，所以利用逆事件计算较为方便.

记 A_i = "事件 A 在第 i 次试验中出现"，则 $P(A_i)=p$ ($i=1, 2, 3$). 而事件"三次独立试验中 A 一次都不出现"是事件"三次独立试验中至少出现一次"的逆事件，其中的前一事件为 $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$，所以，由逆事件的概率性质 $P(A)=1=P(\bar{A})$ 以及三次试验独立，得

$$\frac{19}{27}=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-(1-p)^3,$$

解得 $p=\frac{1}{3}$.

解 应填 $\frac{1}{3}$.

【例 23-4】 设 A, B, C 三个事件两两独立，则 A, B, C 相互独立的充分必要条件是________.

(A) A 与 BC 独立　　(B) AB 与 $A\cup C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

分析 由于 A, B, C 三个事件两两独立，因此 A, B, C 相互独立的条件是 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

在 A, B, C 两两独立的前提下，A, B, C 相互独立的充分必要条件是选项(A).

因为若 A 与 BC 独立，则

$$P(ABC)=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C),$$

所以 A, B, C 相互独立；反过来，若 A, B, C 相互独立，则有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC),$$

说明选项(A)成立. 而其余选项均无法推出以上结论.

解 应选(A).

【例 23-5】 某人向同一目标独立地重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为________.

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.

分析 设事件 A = "第 4 次射击恰好第 2 次命中目标"，则 A 表示共射击 4 次，其中前 3 次只有 1 次击中目标，且第 4 次击中目标. 因此

$$P(A)=C_3^1\,p(1-p)^2\,p=3p^2(1-p)^2.$$

解 应选(C).

【例 23-6】 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$，问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少?

分析 显然每个人是否能译出密码是相互独立的，故可用事件的独立性来计算概率.

解 三人能否译出密码相互独立，记 A_i = "第 i 个人能译出" ($i=1, 2, 3$)，则

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)\\&=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=1-0.4=0.6.\end{aligned}$$

【**例 23-7**】 甲、乙两个乒乓球运动员进行单打比赛，每赛一局甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4. 比赛既可以采用三局两胜制，也可以采用五局三胜制. 问采用哪种赛制对甲有利?

分析 显然，甲和乙在各局比赛中是否获胜都是相互独立的. 本题考查的是甲在哪种赛制下获胜的概率最大. 为使甲最终获胜，若采用三局两胜制，则甲至少要获胜两局，即"甲在前两局获胜"或"甲在前两局中胜一局且在第三局中获胜"；若采用五局三胜制，则甲至少要获胜三局，即"甲在前三局获胜"或"甲在前三局胜两局且在第四局获胜"或"甲在前四局胜两局且在第五局获胜".

解 (1) 采用三局两胜制. 设 A ="甲最终获胜"，A_1 ="甲在前两局获胜"，A_2 ="甲在前两局中胜一局且在第三局获胜"，则 $A=A_1\cup A_2$，且 $A_1A_2=\varnothing$，而

$$P(A_1)=0.6\times0.6=0.36,\ P(A_2)=\mathrm{C}_2^1\times0.6^1\times(1-0.6)^1\times0.6=0.288,$$

故

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0.36+0.288=0.648.$$

(2) 采用五局三胜制. 设 B ="甲最终获胜"，B_1 ="甲在前三局获胜"，B_2 ="甲在前三局胜两局且在第四局获胜"，B_3 ="甲在前四局胜两局且在第五局获胜"，则 $B=B_1\cup B_2\cup B_3$，且 $B_iB_j=\varnothing$，($i\neq j$; $i,j=1,2,3$)，而

$$P(B_1)=\mathrm{C}_3^3\times0.6^3\times(1-0.6)^0=0.216,$$
$$P(B_2)=\mathrm{C}_3^2\times0.6^2\times(1-0.6)^1\times0.6=0.259,$$
$$P(B_3)=\mathrm{C}_4^2\times0.6^2\times(1-0.6)^2\times0.6=0.207,$$

故

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0.216+0.259+0.207=0.682.$$

综上，由于 $P(B)>P(A)$，即甲在五局三胜制下获胜的概率最大，所以采用五局三胜制对甲有利.

24　一维离散型随机变量的分布律或分布函数的判定与求法

24.1　解题方法

求离散型随机变量的分布律及分布函数，只需按照如下定义直接计算即可.

设离散型随机变量 X 的所有可能的取值为 $x_k(k=1, 2, \cdots)$，且 X 取各个值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1, 2, \cdots),$$

其中，$p_k \geqslant 0$ ($k=1, 2, \cdots$)，$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k=1$，则

(1) 离散型随机变量 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

(2) X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X \leqslant x\}=\sum_{x_k \leqslant x} P\{X=x_k\}=\sum_{x_k \leqslant x} p_k.$$

求离散型随机变量的分布律的关键在于由题意设出随机变量 X，找出所有可能的取值 $x_k(k=1, 2, \cdots)$，并求出取每个可能值的概率 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1, 2, \cdots)$.

24.2　典型题解析

【例 24-1】 将一颗骰子抛掷两次，以 X 表示两次中得到的小的点数，试求 X 的分布律.

分析　按照分布律的定义，应首先根据随机变量 X 的含义确定出所有的可能取值，然后求出 X 取每个可能值（随机事件）的概率即可.

解　X 的所有可能取值为 1，2，3，4，5，6，又因为

$$P\{X=1\}=\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{C_2^1\times1\times5}{6\times6}=\frac{11}{36}$$ （两次都是 1 或两次恰有一个 1，以下类同），

$$P\{X=2\}=\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{C_2^1\times1\times4}{6\times6}=\frac{9}{36},$$

$$P\{X=3\}=\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{C_2^1\times1\times3}{6\times6}=\frac{7}{36},$$

$$P\{X=4\}=\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{C_2^1\times1\times2}{6\times6}=\frac{5}{36},$$

$$P\{X=5\}=\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{C_2^1\times1\times1}{6\times6}=\frac{3}{36},$$

$$P\{X=6\}=\frac{1\times1}{6\times6}=\frac{1}{36},$$

所以，X 的分布律为

X	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

【例 24-2】 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

分析 (1) 确定出 X 的分布律即能求出 $E(X)$；

(2) 利用全概率公式可计算出从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

解 (1) X 的可能取值为 0, 1, 2, 3. 下面计算 X 取各个值的概率. 记

B_i = "从甲箱中取出的三件产品中，次品件数为 i" $(i=0, 1, 2, 3)$，

则

$$P\{X=0\}=P(B_0)=\frac{C_3^0\times C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20},$$

$$P\{X=1\}=P(B_1)=\frac{C_3^1\times C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P\{X=2\}=P(B_2)=\frac{C_3^2\times C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P\{X=3\}=P(B_3)=\frac{C_3^3\times C_3^0}{C_6^3}=\frac{1}{20}.$$

故 X 的分布律为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此

$$E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}.$$

(2) 记 A = "从乙箱中任取一件产品是次品"，则由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)\\&=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

【例 24-3】 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

则 X 的分布律为 ________.

分析 本题是由离散型随机变量的分布函数反求分布律的问题.

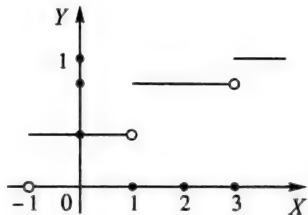
解 方法一：因为

$$P\{X=x\}=P\{X\leqslant x\}-P\{X<x\}=F(x)-F(x-0),$$

所以，只有在 $F(x)$ 的不连续点（$x=-1, 1, 3$）上 $P\{X=x\}$ 不为零，且

$$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.4-0=0.4,$$
$$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4,$$
$$P\{X=3\}=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2.$$

方法二：直接做出 X 的分布函数 $F(x)$ 的图形. 如右图所示.



由于阶梯形的分布函数对应的随机变量为离散型随机变量，且随机变量在跳跃点处取值的概率不为零，等于跳跃幅度的大小，因此

$$P\{X=-1\}=0.4,$$
$$P\{X=1\}=0.4,$$
$$P\{X=3\}=0.2.$$

解 应填

X	-1	1	3
p_k	0.4	0.4	0.2

【例 24-4】 从学校乘车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{2}{5}$，设 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

分析 本题是一道有关离散型随机变量的基本题型. 由题设可知 $X\sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$，由此可得 X 的分布律、分布函数和数学期望.

解 由题意，易知 $X\sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$，即 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3，且

$$P\{X=0\}=C_3^0\times\left(\frac{2}{5}\right)^0\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{27}{125},$$

$$P\{X=1\}=C_3^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{54}{125},$$

$$P\{X=2\}=C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^1=\frac{36}{125},$$

$$P\{X=3\}=C_3^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(1-\frac{2}{5}\right)^0=\frac{8}{125}.$$

所以，X 的分布律为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

由分布律可得 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{27}{125}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{81}{125}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{117}{125}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

由 $X\sim B\left(3,\dfrac{2}{5}\right)$知,

$$E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}.$$

或者

$$E(X)=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{6}{5}.$$

25 一维连续型随机变量的概率密度或分布函数的判定与求法

25.1 解题方法

Ⅰ. 一维连续型随机变量 X 的概率密度函数的确定方法

(1) 若已知含有参数的概率密度函数 $f(x)$ 的表达式，则可利用概率密度函数的如下两条特征性质来确定其中的参数：

① $f(x)\geqslant 0 \quad (-\infty<x<+\infty)$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1.$

(2) 若已知分布函数 $F(x)$，则 $f(x)=F'(x)$，其中，x 为 $f(x)$ 的连续点 [在 $f(x)$ 的不连续点处，可补充 $f(x)=0$].

Ⅱ. 一维连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 的确定方法

① 若已知一维连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$，则

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t \quad (-\infty<x<+\infty);$$

② 若已知含有参数的分布函数 $F(x)$ 的表达式，则可利用分布函数的性质，如

$$F(+\infty)=1,\ F(-\infty)=0,\ F(x+0)=F(x)$$

来确定其中的参数.

Ⅲ. 若已知一维连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 或概率密度函数 $f(x)$，则

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x \quad (\forall x_1<x_2).$$

25.2 典型题解析

【例 25-1】 设 X_1 和 X_2 是任意两个独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则________.

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一个随机变量的概率密度

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一个随机变量的概率密度

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一个随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一个随机变量的分布函数

分析 本题考查概率密度和分布函数的性质. 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=1+1=2,$$

可排除(A).

若取 $f_1(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$

但 $f_1(x)f_2(x)=\begin{cases}2e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ 不能作为某一个随机变量的概率密度，故可排除(B).

再由 $F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=1+1=2\neq 1$，可排除(C)．故(D) 为正确答案.

解 应选(D)．

注 若取 $Y=\max\{X_1, X_2\}$，则 Y 的分布函数为 $F_1(x)F_2(x)$，可直接得(D) 为正确答案.

【例 25-2】 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是________．

(A) $f_1(x)f_2(x)$ (B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$ (D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

分析 本题主要考查分布函数与概率密度函数的性质及二者的关系.

由于 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为连续函数，故它们的分布函数 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 也连续. 根据概率密度的性质，应有 $f(x)$ 非负，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 在四个选项中，只有(D) 选项满足如下条件:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(x)\,\mathrm{d}F_1(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)\,\mathrm{d}F_2(x)\\
=&\ F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)\,\mathrm{d}F_2(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)\,\mathrm{d}F_2(x)=1.
\end{aligned}
$$

解 应选(D)．

【例 25-3】 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数据中，应取________.

(A) $a=\frac{3}{5}, b=-\frac{2}{5}$ (B) $a=\frac{2}{3}, b=\frac{2}{3}$

(C) $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$ (D) $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}$

分析 根据分布函数的性质知，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，有

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=a\lim_{x\to+\infty}F_1(x)-b\lim_{x\to+\infty}F_2(x)=1,$$

即 $a-b=1$. 对比四个选项知，只有(A) 中的 a 和 b 满足 $a-b=1$.

解 应选(A)．

【例 25-4】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 则 $A=$________，$P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=$________.

分析 根据分布函数的性质知 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}F(x)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$，由此可得 $A=1$，而

$$P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=P\left\{-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6}\right\}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}-0=\frac{1}{2}.$$

解 应填 $1,\frac{1}{2}$.

【例 25-5】 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，则 X 的分布函数为 $F(x)=$ ________.

分析 本题是一个常规题型，是由概率密度函数求分布函数，只需直接计算积分 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t\ (-\infty<x<+\infty)$ 即可.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|t|}\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}\mathrm{d}t, & x<0,\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{d}t, & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

解 应填 $\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0.\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

26 几个常用随机变量的概率分布

26.1 解题方法

应牢记下列几个常用随机变量的分布律或概率密度，在计算相应的随机事件的概率时，应首先找出随机变量的分布，然后便直接套用公式即可.

(1) (0-1) 分布：分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\quad (k=0,1).$$

(2) 二项分布 $X\sim B(n,p)$：分布律为

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

(3) 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$：分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad (k=0,1,2,\cdots).$$

(4) 均匀分布 $X\sim U(a,b)$：概率密度与分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

(5) 指数分布：概率密度与分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(6) 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$：概率密度与分布函数分别为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t\quad (-\infty<x<+\infty).$$

标准正态分布 $X\sim N(0,1)$：概率密度与分布函数分别为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\quad (-\infty<x<+\infty).$$

26.2 典型题解析

【例 26-1】 随机变量 X, Y 都服从二项分布：$X\sim B(2,p)$，$Y\sim B(4,p)$. 已知 $P\{X\geqslant 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\geqslant 1\}=$________.

(A) $\frac{65}{81}$　　(B) $\frac{56}{81}$　　(C) $\frac{80}{81}$　　(D) 1

分析　本题考查二项分布. 应先由条件确定 Y 的分布律，再计算概率.

由 $P\{X\geqslant1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-p)^2=\frac{5}{9}$ 可得 $p=\frac{1}{3}$；故 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，从而

$$P\{Y\geqslant1\}=1-P\{Y=0\}=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{65}{81},$$

故应选(A).

解　应选(A).

【例 26-2】　设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于________.

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D) $u_{1-\alpha}$

分析　本题考查标准正态分布的概率密度函数图形的对称性. 因为

$$P\{|X|<x\}=1-P\{|X|\geqslant x\}=1-2P\{X\geqslant x\}=\alpha,$$

所以 $P\{X\geqslant x\}=\frac{1-\alpha}{2}$，于是 $x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. 故本题应选(C).

解　应选(C).

注　本题中的 u_α 是标准正态分布的上 α 分位点，它有性质：$u_{1-\alpha}=-u_\alpha$.

【例 26-3】　设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，$P_j=P\{-2\leqslant X_j\leqslant2\}(j=1,2,3)$，则________.

(A) $P_1>P_2>P_3$　　(B) $P_2>P_1>P_3$　　(C) $P_3>P_1>P_2$　　(D) $P_1>P_3>P_2$

分析　本题涉及服从正态分布的随机变量的概率计算问题. 因为

$$P_1=P\{-2\leqslant X_1\leqslant2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1\approx0.9544,$$

$$P_2=P\{-2\leqslant X_2\leqslant2\}=\Phi\left(\frac{2}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1\approx0.6826,$$

$$P_3=P\{-2\leqslant X_3\leqslant2\}=\Phi\left(\frac{2-5}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-2-5}{3}\right)=\Phi(-1)-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right)=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)-\Phi(1)$$
$$<0.5,$$

所以 $P_1>P_2>P_3$.

解　应选(A).

注　也可利用正态分布的"3σ"法则：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=68.26\%,$$
$$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=95.44\%,$$
$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=99.74\%.$$

由此可立即得出 $P_1>P_2$. 再计算 $P_3=P\{-2\leqslant X_3\leqslant2\}$ 即可得出正确答案.

【例 26-4】　设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$，则________.

(A) 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$

(B) 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$

(C) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$

(D) 对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$

分析　本题涉及服从正态分布的随机变量的概率计算问题.

由于 $X \sim N(\mu, 4^2)$, $Y \sim N(\mu, 5^2)$, 所以$\frac{X-\mu}{4} \sim N(0, 1)$, $\frac{Y-\mu}{5} \sim N(0, 1)$, 故

$$p_1 = P\{X \leqslant \mu - 4\} = P\left\{\frac{X-\mu}{4} \leqslant -1\right\} = \Phi(-1),$$

$$p_2 = P\{Y \geqslant \mu + 5\} = P\left\{\frac{Y-\mu}{5} \leqslant -1\right\} = \Phi(-1).$$

故 $p_1 = p_2$.

解　应选(A).

【例 26-5】 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上的均匀分布的概率密度, 若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leqslant 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}$ $(a>0, b>0)$ 为概率密度, 则 a, b 应满足________.

(A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$　　(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=2$

分析　本题考查概率密度函数的性质及标准正态分布、均匀分布的密度函数.

易见 $f(x) \geqslant 0$, 由于 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 是 $[-1, 3]$ 上的均匀分布的概率密度, 因此有

$$f_1(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 是概率密度函数, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} af_1(x)\,dx + \int_0^3 bf_2(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_0^3 \frac{b}{4}\,dx \\ &= \frac{a}{2} + \frac{3}{4}b = 1. \end{aligned}$$

故 $2a+3b=4$.

解　应选(A).

【例 26-6】 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma>0)$, 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为$\frac{1}{2}$, 则 $\mu =$ ________.

分析　本题考查正态分布的概率密度函数图形的对称性, 即密度函数的图形关于直线 $x=\mu$ 对称, 也即 $P\{X \leqslant \mu\} = P\{X > \mu\} = 0.5$. 因为方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根 $\Leftrightarrow \Delta = 4^2 - 4X < 0 \Leftrightarrow X > 4$, 所以, 由题意可知 $P\{X>4\} = 0.5$, 再由正态分布的概率密度函数的对称性可知 $\mu = 4$.

解　应填 4.

【例 26-7】 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则

$P\{Y \leqslant a+1 \mid Y>a\}=$ ________.

分析 本题考查条件概率的计算及服从指数分布的随机变量的概率计算.

因为随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，故随机变量 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y \leqslant 0.\end{cases}$$

所以

$$P\{Y>a\}=\int_a^{+\infty} f(y)\,dy=\int_a^{+\infty} e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_a^{+\infty}=e^{-a},$$

$$P\{a<Y \leqslant a+1\}=\int_a^{a+1} f(y)\,dy=\int_a^{a+1} e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_a^{a+1}=e^{-a}-e^{-(a+1)},$$

$$P\{Y \leqslant a+1 \mid Y>a\}=\frac{P\{(Y>a)\cap(Y \leqslant a+1)\}}{P\{Y>a\}}=\frac{P\{a<Y \leqslant a+1\}}{P\{Y>a\}}$$

$$=\frac{e^{-a}-e^{-(a+1)}}{e^{-a}}=1-e^{-1}.$$

解 应填 $1-e^{-1}$.

【**例 26-8**】 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（单位：min）服从指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & x \leqslant 0.\end{cases}$ 某顾客在窗口等待服务，若超过 10min，他就离开．他一个月要到银行 5 次．以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数．写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y \geqslant 1\}$.

分析 本题中求 $P\{Y \geqslant 1\}$，需首先找出随机变量 Y 的分布律．由题设，显然 Y 服从二项分布 $Y \sim B(5, p)$，故只需求出“顾客在窗口未等到服务而离开”的概率 p 即可.

解 设顾客在窗口未等到服务而离开的概率为

$$p=\int_{10}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\,dx=-e^{-\frac{x}{5}}\Big|_{10}^{+\infty}=e^{-2}.$$

显然，$Y \sim B(5, e^{-2})$，故

$$P\{Y=k\}=C_5^k \cdot e^{-2k} \cdot (1-e^{-2})^{5-k} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

因此

$$P\{Y \geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-e^{-2})^5 \approx 0.5167.$$

【**例 26-9**】 某工厂生产的电子管的寿命 X（单位：h）服从正态分布 $N(1600, \sigma^2)$，如果要求电子管的寿命在 1200h 以上的概率不小于 0.96，求 σ 的值.

分析 本题是常规的正态随机变量的概率计算问题.

解 因为 $P\{X \geqslant 1200\}=1-P\{X<1200\}=1-\Phi\left(\frac{1200-1600}{\sigma}\right)$

$$=1-\Phi\left(-\frac{400}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{400}{\sigma}\right) \geqslant 0.96=\Phi(1.75),$$

所以 $\frac{400}{\sigma} \geqslant 1.75$，即 $\sigma \leqslant 228\ \left(\frac{400}{1.75} \approx 228.57\right)$.

27 一维随机变量函数的分布的求法

27.1 解题方法

Ⅰ. 求离散型随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的分布律的方法

若离散型随机变量 X 的分布律为

X	x_1	x_2	…	x_k	…
p_k	p_1	p_2	…	p_k	…

则随机变量 $Y=g(X)$ 的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	…	$g(x_k)$	…
p_k	p_1	p_2	…	p_k	…

若 $g(x_k)(k=1,2,\cdots)$ 全不相等时，上表即是随机变量 $Y=g(X)$ 的分布律；若 $g(x_k)$ $(k=1,2,\cdots)$ 中的值有相等的时候，则将对应的相等值合并成一项，其相应的概率相加，即可得到随机变量 $Y=g(X)$ 的分布律.

Ⅱ. 求连续型随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的概率密度的方法

方法一：分布函数法.

(1) 求出使 $f_X(x)$ 取非零值的区间，并求出 $g(x)$ 在该区间上的最小值（记为 α）与最大值（记为 β）；

(2) 分别在 $(-\infty,\alpha)$，$[\alpha,\beta)$，$[\beta,+\infty)$ 上求出 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}$$

的表达式；

(3) 对 $F_Y(y)$ 求导数即得 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

方法二：公式法.

若 $y=g(x)$ 是单调函数，且其反函数 $x=h(y)$ 具有一阶连续导数，则 $Y=g(X)$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中，(α,β) 是 $g(x)$ 的值域，$-\infty\leqslant\alpha<y<\beta\leqslant+\infty$.

27.2 典型题解析

【例 27-1】 已知随机变量 X 的分布律为

X	-2	$-\frac{1}{2}$	0	2	4
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求随机变量（1）$X+2$；（2）$-X+1$；（3）X^2的分布律.

分析 本题是求离散型随机变量的函数的分布律的计算题. 应熟练掌握其计算方法——“倒表法”.

解 因为

p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
X	-2	$-\frac{1}{2}$	0	2	4
$X+2$	0	$\frac{3}{2}$	2	4	6
$-X+1$	3	$\frac{3}{2}$	1	-1	-3
X^2	4	$\frac{1}{4}$	0	4	16

故所求的分布律分别为

（1）

$X+2$	0	$\frac{3}{2}$	2	4	6
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

（2）

$-X+1$	-3	-1	1	$\frac{3}{2}$	3
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

（3）

X^2	0	$\frac{1}{4}$	4	16
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$

【例 27-2】 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$的概率密度函数 $f_Y(y)$.

分析 本题应先求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，再求导数得到 $f_Y(y)$.

解 因为

$$
\begin{aligned}
F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\leqslant y\}=P\{X\geqslant(1-y)^3\}\\
&=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right],
\end{aligned}
$$

于是得 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}.$$

【例 27-3】 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1\leqslant x\leqslant 8,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 是 X 的分布函数. 求 $Y=F(X)$ 的分布函数.

分析 本题应首先求出随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 的具体表达式, 从而可确定 $Y=F(X)$; 然后按照定义求 Y 的分布函数即可. 注意应先确定 $Y=F(X)$ 的值域范围($0\leqslant F(X)\leqslant 1$), 再对 y 进行分段讨论.

解 易见, 当 $x<1$ 时

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\,\mathrm{d}x=0;$$

当 $1\leqslant x\leqslant 8$ 时

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{1}^{x}\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t=\sqrt[3]{x}-1;$$

当 $x>8$ 时

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{1}^{8}\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t=1.$$

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \sqrt[3]{x}-1, & 1\leqslant x\leqslant 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$

设 $G(y)$ 为随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数. 显然, 当 $y<0$ 时, $G(y)=0$; 当 $y\geqslant 1$ 时, $G(y)=1$; 当 $0\leqslant y<1$ 时

$$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}=P\{\sqrt[3]{X}-1\leqslant y\}=P\{X\leqslant (y+1)^3\}=F[(y+1)^3]=y.$$

于是, $Y=F(X)$ 的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

注 事实上, 本题中, X 可以为任意的连续型随机变量. 此时, $Y=F(X)$ 仍服从均匀分布:

当 $y<0$ 时, $G(y)=0$;

当 $y\geqslant 1$ 时, $G(y)=1$;

当 $0\leqslant y<1$ 时, $G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant F^{-1}(y)\}=F[F^{-1}(y)]=y$.

【例 27-4】 假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布, 平均无故障工作的时间 $[E(X)]$ 为 5h. 设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而在无故障的情况下工作 2h 便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

分析 本题应首先确定随机变量 Y 与 X 的关系，再根据 X 的概率密度，利用分布函数的定义确定 $F(y)$.

解 设 X 的分布参数为 λ，由于 $E(X)=\frac{1}{\lambda}=5$，故 $\lambda=\frac{1}{5}$，即 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

显然，$Y=\min\{X,2\}$. 当 $y<0$ 时，$F(y)=0$；当 $y\geqslant 2$ 时，$F(y)=1$；当 $0\leqslant y<2$ 时，

$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}=P\{X\leqslant y\}=1-e^{-\frac{y}{5}}.$$

于是，Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-e^{-\frac{y}{5}}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

注 求随机变量函数 $Y=g(X)$ 的分布，应先确定 $g(X)$ 的值域 $[c,d]$，则当 $y<c$ 或 $y\geqslant d$ 时，$F(y)$ 均可方便地求出；关键是当 $c\leqslant y<d$ 时，分布函数 $F(y)$ 的计算，一般地，将连续型随机变量转化为定积分的计算.

【例 27-5】 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，求：(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；(2) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

分析 (1) 先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，再求导数得 $f_Y(y)$；

(2) 按照定义计算 $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

解 (1) 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

当 $y<0$ 时

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=0;$$

当 $y\geqslant 0$ 时

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)\,dx$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx, & 0\leqslant y<1,\\ \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx, & 1\leqslant y<4,\\ \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}dx, & y\geqslant 4\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\leqslant y<4,\\ 1, & y\geqslant 4.\end{cases}$$

所以

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)
$$F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2},\ Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2},\ X^2\leqslant 4\right\}$$
$$=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2},\ -2\leqslant X\leqslant 2\right\}=P\left\{-2\leqslant X\leqslant -\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

28 二维离散型随机变量的分布律的求法

28.1 解题方法

求二维离散型随机变量的分布律，只需按照如下定义直接计算即可.

设二维离散型随机变量(X, Y)的所有可能的取值为(x_i, y_j) $(i, j=1, 2, \cdots)$，且(X, Y)取各个值的概率为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots). \qquad (*)$$

其中，$p_{ij}\geqslant 0$ $(i, j=1, 2, \cdots)$，$\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1$，则$(X, Y)$的分布律为

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

求二维离散型随机变量的分布律，关键在于由题意设出随机变量(X, Y)，找出所有可能的取值(x_i, y_j) $(i, j=1, 2, \cdots)$，并求出取每个可能值的概率$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}(i, j=1, 2, \cdots)$.

28.2 典型题解析

【例 28-1】 在一箱中装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中取两次，每次任取一只，考虑两种试验：(1) 放回抽样；(2) 不放回抽样. 定义随机变量X, Y如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{若第一次取出的是正品,}\\ 1, & \text{若第一次取出的是次品;}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, & \text{若第二次取出的是正品,}\\ 1, & \text{若第二次取出的是次品.}\end{cases}$$

试分别就 (1) (2) 两种情况，写出X和Y的联合分布律.

分析 本题是求二维离散型随机变量的分布律，按照定义直接计算即可. 首先应根据随机变量X和Y的含义，确定出(X, Y)的所有可能取值，再求出(X, Y)取每个可能值（随机事件）的概率.

解 (1) 放回抽样：因为$P\{X=0\}=\dfrac{5}{6}$, $P\{X=1\}=\dfrac{1}{6}$; $P\{Y=0\}=\dfrac{5}{6}$, $P\{Y=1\}=\dfrac{1}{6}$,
且$P\{X=i, Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j|X=i\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\}$ $(i=0, 1; j=0, 1)$，于是，(X, Y)的分布律为

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2) 不放回抽样：由于 $P\{X=0\}=\frac{5}{6}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{6}$，在第一次抽出一正品后，第二次抽取前的状态为：正品 9 只，次品 2 只. 故

$$P\{Y=0|X=0\}=\frac{9}{11},\quad P\{Y=1|X=0\}=\frac{2}{11},$$

$$P\{Y=0|X=1\}=\frac{10}{11},\quad P\{Y=1|X=1\}=\frac{1}{11},$$

且 $P\{X=i,\ Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j|X=i\}\quad(i=0,1;\ j=0,1)$. 于是，$(X,Y)$的分布律为

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

【例 28-2】 袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次，每次取一个球. 以 X，Y，Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P\{X=1|Z=0\}$；(2) 求二维随机变量(X,Y)的分布律.

分析 (1) 按照条件概率公式 $P\{X=1|Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,\ Z=0\}}{P\{Z=0\}}$计算.

(2) 求二维离散型随机变量(X,Y)的分布律，按照定义直接计算即可. 首先应根据随机变量 X 和 Y 的含义，确定出(X,Y)的所有可能取值，再求出(X,Y)取每个可能值（随机事件）的概率.

解 (1) 因为

$$P\{Z=0\}=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{9}{36},\quad P\{X=1,\ Z=0\}=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{36},$$

所以

$$P\{X=1|Z=0\}=\frac{P\{X=1,\ Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{4}{9}.$$

(2) (X,Y)为离散型随机变量，其取值为$(0,0)$，$(0,1)$，$(0,2)$，$(1,0)$，$(1,1)$，$(1,2)$，$(2,0)$，$(2,1)$，$(2,2)$，相应的概率为

$$P\{X=0,\ Y=0\}=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{9}{36},\quad P\{X=0,\ Y=1\}=2\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{12}{36},$$

$$P\{X=0, Y=2\}=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36}, \quad P\{X=1, Y=0\}=2\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{6}{36},$$

$$P\{X=1, Y=1\}=2\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36}, \quad P\{X=2, Y=0\}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36},$$

$$P\{X=1, Y=2\}=P\{X=2, Y=1\}=P\{X=2, Y=2\}=0.$$

所以，(X, Y)的分布律为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$	0
2	$\frac{4}{36}$	0	0

【例 28-3】 设随机变量 $X_i(i=1, 2)$的分布律为

X_i	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

且满足 $P\{X_1 X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}=$ ________.

分析 本题是求二维离散型随机变量在满足一定条件下的概率. 一般来说，应先求出此二维离散型随机变量的分布律，再将满足条件的离散点上取值的概率相加即可. 正确理解题设条件 $P\{X_1 X_2=0\}=1$ 是问题的关键，也即 $X_1 X_2=0$ 是必然事件. 换句话说，X_1 和 X_2 同时取非零值是不可能事件，即 $P\{X_1 X_2\neq 0\}=0$. 共有 4 种情况，即

$$P\{X_1=-1, X_2=-1\}=0, P\{X_1=-1, X_2=1\}=0,$$

$$P\{X_1=1, X_2=-1\}=0, P\{X_1=1, X_2=1\}=0.$$

而余下的 5 种情况的概率可利用边缘分布律及其性质容易求出.

下面列出(X_1, X_2)的分布律及其边缘分布中的数值：

X_2 \ X_1	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

可见

$$P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=X_2=-1\}+P\{X_1=X_2=0\}+P\{X_1=X_2=1\}=0.$$

解 应填 0.

【例 28-4】 设 A，B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$. 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求：(1) 二维随机变量(X, Y)的分布律；(2) X与Y的相关系数ρ_{XY}.

分析 (1) 确定(X, Y)可能取的各组值和对应的概率；

(2) 利用 (1) 得到的分布律，按照公式计算ρ_{XY}即可.

解 (1) (X, Y)的可能取值为 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), 又因为

$$P\{X=1, Y=1\}=P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1, Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0, Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}-P(AB)=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0, Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.$$

所以，(X, Y)的分布律为

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

(2) 由(X, Y)的分布律可得

$$E(XY)=0\times0\times\frac{2}{3}+0\times1\times\frac{1}{12}+1\times0\times\frac{1}{6}+1\times1\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12}.$$

又因为 (X, Y)关于X与Y的两个边缘分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p_k	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以

$$E(X)=\frac{1}{4},\quad E(Y)=\frac{1}{6},\quad D(X)=\frac{3}{16},\quad D(Y)=\frac{5}{36}.$$

因此

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{5}{36}}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

注 在求$P\{X=0, Y=0\}$时，也可以利用随机事件的计算公式直接计算：

$$\begin{aligned}P\{X=0, Y=0\}&=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

29 二维连续型随机变量的概率密度或分布函数的求法

29.1 解题方法

Ⅰ. 二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度函数的确定方法

(1) 若已知含有参数的概率密度函数$f(x, y)$的表达式，则可利用概率密度函数的如下两条特征性质来确定其中的参数：

① $f(x, y)\geqslant 0 \quad (-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty)$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$

(2) 若已知分布函数$F(x, y)$，则$f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\partial y}$，其中，$(x, y)$为$f(x, y)$的连续点[在$f(x, y)$的不连续点处，可补充$f(x, y)=0$].

Ⅱ. 二维连续型随机变量(X, Y)的分布函数$F(x, y)$的确定方法

(1) 若已知二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度函数$f(x, y)$，则

$$F(x, y) = P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty).$$

(2) 若已知含有参数的分布函数$F(x, y)$的表达式，则可利用分布函数的性质，如

$$F(+\infty, +\infty)=1,\ F(-\infty, -\infty)=0,\ F(x+0, y)=F(x, y),\ F(x, y+0)=F(x, y)$$

来确定其中的参数.

Ⅲ. 若已知二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度函数$f(x, y)$，则

$$P\{(X, Y)\in G\} = \iint_G f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中，G为平面上的某个区域.

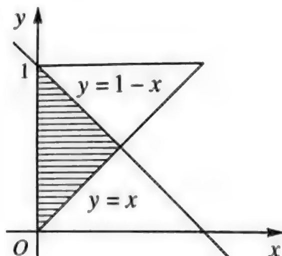
29.2 典型题解析

【例 29-1】 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则$P\{X+Y\leqslant 1\}=$ ________.

分析 本题是有关二维随机变量的概率的常规计算问题. 只需利用性质

$$P\{(X, Y)\in G\} = \iint_G f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

直接计算即可. 如右图所示，则



$$P\{X+Y\leqslant 1\} = \iint_{x+y\leqslant 1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}6x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

解　应填 $\frac{1}{4}$.

【例 29-2】 设 (X, Y) 的概率密度为 $\varphi(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 X 与 Y 中至少有一个小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 ________.

分析　本题是有关二维随机变量的概率的常规计算问题.

$$P\left(\left\{X<\frac{1}{2}\right\} \cup\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}\right)=1-P\left\{X \geqslant \frac{1}{2}, Y \geqslant \frac{1}{2}\right\}=1-\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \varphi(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

$$=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2} \mathrm{d} x \mathrm{d} y=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$$

解　应填 $\frac{5}{8}$.

【例 29-3】 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}4 x y, & 0 \leqslant x \leqslant 1,0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x, y)$.

分析　按照分布函数的计算公式 $F(x, y)=\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) \mathrm{d} u \mathrm{d} v$ 直接计算即可，不过本题需要将整个平面分为五个区域来讨论.

解　$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) \mathrm{d} u \mathrm{d} v$

$$=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0, \\ \int_{0}^{x} \mathrm{d} u \int_{0}^{y} 4 u v \mathrm{d} v, & 0 \leqslant x \leqslant 1,0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \int_{0}^{1} \mathrm{d} u \int_{0}^{y} 4 u v \mathrm{d} v, & x>1,0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \int_{0}^{x} \mathrm{d} u \int_{0}^{1} 4 u v \mathrm{d} v, & 0 \leqslant x \leqslant 1, y>1, \\ \int_{0}^{1} \mathrm{d} u \int_{0}^{1} 4 u v \mathrm{d} v, & x>1, y>1\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0, \\ x^{2} y^{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1,0 \leqslant y \leqslant 1, \\ y^{2}, & x>1,0 \leqslant y \leqslant 1, \\ x^{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, y>1, \\ 1, & x>1, y>1.\end{cases}$$

【例 29-4】 设随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y)=A\left(B+\arctan \frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan \frac{y}{3}\right),$$

求：(1) 系数 A, B 及 C；(2) (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$；(3) 关于 X, Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；(4) 讨论 X 与 Y 是否相互独立.

分析　确定 $F(x, y)$ 中的系数要用到二维随机变量的分布函数的极限的性质：

$$F(+\infty,+\infty)=1, F(-\infty,-\infty)=0;$$

判断 X 与 Y 的相互独立性则用 $f(x, y)=f_X(x) \cdot f_Y(y)$. 为此，先求出 (X, Y) 的概率密度函数 $f(x, y)$.

解 (1) 由 $F(+\infty, +\infty)=1$, $F(-\infty, -\infty)=0$ 有

$$A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1 \quad \left(因为 \lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}\right),$$

$$A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \left(因为 \lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}\right),$$

由此得 $A=\frac{1}{\pi^2}$, $B=C=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$F(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right).$$

(2) 由 $f(x, y)=\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\partial y}$, 得

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}.$$

(3) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}y=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{9+y^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi^2(4+x^2)}\left[\arctan\frac{y}{3}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{\pi^2(4+x^2)}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2}{\pi(4+x^2)} \quad (-\infty<x<+\infty).$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}x=\frac{6}{\pi^2(9+y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{\pi^2(9+y^2)}\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{3}{\pi^2(9+y^2)}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{3}{\pi(9+y^2)} \quad (-\infty<y<+\infty).$$

(4) 由于对于任意 $x, y\in\mathbf{R}$, 总有 $f(x, y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 故 X 与 Y 是相互独立的.

30 边缘分布的求法与随机变量独立性的判别

30.1 解题方法

Ⅰ. 边缘分布的求法

(1) 二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$, X和Y的分布函数分别为$F_X(x)$, $F_Y(y)$, 则有

$$F_X(x)=F(x, +\infty), \quad F_Y(y)=F(+\infty, y).$$

(2) 二维离散型随机变量(X, Y): 设(X, Y)的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots),$$

则(X, Y)关于X和Y的边缘分布律分别为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots),$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij} \quad (j=1, 2, \cdots).$$

(3) 二维连续型随机变量(X, Y): 设(X, Y)的概率密度为$f(x, y)$, 则(X, Y)关于X和Y的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}y, \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}x.$$

Ⅱ. 随机变量独立性的判别

(1) X与Y相互独立$\Leftrightarrow P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}\cdot P\{Y\leqslant y\}$, 即

$$F(x, y)=F_X(x)\cdot F_Y(y) \quad (\forall x, y\in \mathbf{R}).$$

(2) (X, Y)是二维离散型随机变量时,

X和Y相互独立$\Leftrightarrow P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$, 即

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j} \quad (i, j=1, 2, \cdots).$$

(3) (X, Y)是二维连续型随机变量时,

$$X\text{与}Y\text{相互独立}\Leftrightarrow f(x, y)=f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad (\forall x, y\in \mathbf{R}).$$

30.2 典型题解析

【例 30-1】 设随机变量X和Y相互独立, 且X和Y的分布律分别为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则$P\{X+Y=2\}=$________.

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$

分析 本题涉及二维离散型随机变量的独立性、联合分布律以及二维离散型随机变量的函数的分布律问题.

其方法是：可首先求出(X, Y)的联合分布律，然后求出$X+Y$的分布律，最后计算概率$P\{X+Y=2\}$. 也可利用X和Y的独立性直接计算$P\{X+Y=2\}$.

由于X和Y相互独立，故有

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\} \quad (\forall i, j),$$

所以

$$\begin{aligned}P\{X+Y=2\}&=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=2, Y=0\}+P\{X=3, Y=-1\}\\&=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}+P\{X=2\}\cdot P\{Y=0\}+P\{X=3\}\cdot P\{Y=-1\}\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

解 应选(C).

【例 30-2】 设二维随机变量(X, Y)的分布律为

Y \ X	0	1
0	0.4	b
1	a	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则________.

(A) $a=0.2, b=0.3$　　(B) $a=0.4, b=0.1$

(C) $a=0.3, b=0.2$　　(D) $a=0.1, b=0.4$

分析 利用分布律的性质和事件的独立性即可.

由分布律的性质知$0.4+a+b+0.1=1$，即

$$a+b=0.5. \qquad ①$$

由随机事件的独立性，得

$$P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\},$$

即

$$P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\},$$

于是，有

$$a=(0.4+a)(a+b). \qquad ②$$

解由①②组成的方程组，得$a=0.4$，$b=0.1$. 故应选(B).

解 应选(B).

【例 30-3】 设随机变量X与Y相互独立，且分别服从参数为1与参数为4的指数分布，则$P\{X<Y\}=$________.

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{4}{5}$

分析 先利用X与Y的独立性，求出X与Y的联合概率密度$f(x, y)$，再按照公式$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$计算所求的概率.

依题设知，X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

又因为 X 与 Y 相互独立，从而 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-(x+4y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

于是

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}4e^{-(x+4y)}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}e^{-5x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}.$$

解 应选(A).

【例 30-4】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ ________.

分析 先写出 X, Y 的概率密度，再利用 X 与 Y 的独立性即可算得所要求的概率.

由题设知，X 与 Y 有相同的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 故由 X 与 Y 相互独立可得

$$P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,\ Y\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}\cdot P\{Y\leqslant 1\}$$
$$=[P\{X\leqslant 1\}]^2=\left(\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{9}.$$

解 应填 $\frac{1}{9}$.

【例 30-5】 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度；

(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率.

分析 (1) 利用 X 和 Y 相互独立，可得 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$；

(2) 将二次方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的概率转化为随机变量 (X,Y) 落在某一区域 G 上的概率，再利用 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 进行计算.

解 (1) 由题意，得 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 由于 X 和 Y 相互独立，因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,\ y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) 方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根 $\Leftrightarrow \Delta=4X^2-4Y\geqslant 0\Leftrightarrow X^2\geqslant Y$，从而方程有实根

的概率为

$$P\{Y \leqslant X^2\} = \iint\limits_{y \leqslant x^2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y$$

$$= 1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 1 - \sqrt{2\pi}[\Phi(1) - \Phi(0)] = 0.1445.$$

【例 30-6】 设平面区域 D 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 和直线 $y = 0$, $x = 1$, $x = \mathrm{e}^2$ 围成, 二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布. 求 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x = 2$ 处的值.

分析 本题是求二维连续型随机变量的边缘概率密度的常规题型. 只需牢记如下公式:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

解 设平面区域 D 的面积为 S_D, 则 $S_D = \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2.$

由于二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 因此 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^2, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

所以

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2x} \quad (1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^2),$$

从而

$$f_X(2) = \frac{1}{4}.$$

【例 30-7】 一电子仪器由两个部件构成, 以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命 (单位: 10^3h), 已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0.5x} - \mathrm{e}^{-0.5y} + \mathrm{e}^{-0.5(x+y)}, & x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) X 和 Y 是否独立? (2) 求两个部件的寿命都超过 100h 的概率 a.

分析 本题是利用分布函数或概率密度验证 X 和 Y 的独立性问题. 由于本题给出了 X 和 Y 的联合分布函数, 故可先求出 X 和 Y 的两个边缘分布函数, 再验证 X 和 Y 是否独立.

解 (1) 设 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0.5x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0.5y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

由于

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}),$$

故知 X 和 Y 相互独立.

(2)
$$\begin{aligned}a&=P\{X>0.1,\ Y>0.1\}=P\{X>0.1\}\cdot P\{Y>0.1\}\\&=[1-F_X(0.1)]\cdot[1-F_Y(0.1)]\\&=e^{-0.5}\cdot e^{-0.5}=e^{-0.1}.\end{aligned}$$

【例 30-8】 设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为$f(x,\ y)=\begin{cases}1,\ 0<x<1,\ 0<y<2x,\\0,\ 其他,\end{cases}$

求：(1) $(X,\ Y)$的边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；(2) $Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

分析 (1) 按照边缘概率密度的定义直接计算$f_X(x)$，$f_Y(y)$即可；

(2) 先求$Z=2X-Y$的分布函数$F_Z(z)$，再求导得$f_Z(z)$.

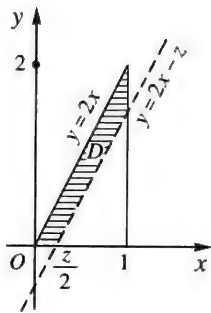
解 (1) 按照边缘概率密度的计算公式，有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y,\ 0<x<1,\\0,\quad 其他\end{cases}=\begin{cases}2x,\ 0<x<1,\\0,\quad 其他;\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x,\ 0<y<2,\\0,\quad 其他\end{cases}=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2},\ 0<y<2,\\0,\quad 其他.\end{cases}$$

(2) 记Z的分布函数为$F_Z(z)$，则

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$=\begin{cases}0,\quad \dfrac{z}{2}\leqslant 0,\\\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ 0<\dfrac{z}{2}<1,\ (其中，D\text{ 为右图阴影部分})\\1,\quad \dfrac{z}{2}\geqslant 1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0,\quad z\leqslant 0,\\z-\dfrac{z^2}{4},\ 0<z<2,\\1,\quad z\geqslant 2,\end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2},\ 0<z<2,\\0.\quad 其他.\end{cases}$$

注 (1) 计算边缘概率密度$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}y$时，要注意积分不是在$y$轴上进行，而是在通过点$(x,\ 0)$且与$y$轴平行的直线上进行；对于$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}x$也有同样的说法.

(2) 在求一维或二维连续型随机变量函数的概率密度时，一般总是先根据分布函数的定义算出分布函数，再通过求导得到概率密度.

【例 30-9】 设随机变量X，Y相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0,\ 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y},\ y>0,\\ 0,\quad y\leqslant 0.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

分析 这是计算两个独立随机变量和的概率密度函数的典型题. 此类问题一般有两种解法：一种是先写出二维随机变量(X, Y)的概率密度函数，并求出 $Z=2X+Y$ 的分布函数，再通过求导计算出 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数；另一种是直接利用两独立随机变量和的概率密度计算公式求出.

解 方法一：因为 X，Y 相互独立，所以二维随机变量(X, Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>0,\\ 0,\quad 其他.\end{cases}$$

故随机变量 $Z=2X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\,\mathrm{d}y, & 0<z\leqslant 2,\\ \int_0^{1}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\,\mathrm{d}y, & z>2\end{cases}=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}(1-e^{2x-z})\mathrm{d}x, & 0<z\leqslant 2,\\ \int_0^{1}(1-e^{2x-z})\mathrm{d}x, & z>2.\end{cases}$$

于是，随机变量 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z>2.\end{cases}$$

方法二：由于随机变量 X，Y 相互独立，所以随机变量 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-2x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f_Y(z-2x)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}e^{-(z-2x)}\,\mathrm{d}x, & 0<z\leqslant 2,\\ \int_0^{1}e^{-(z-2x)}\,\mathrm{d}x, & z>2\end{cases}=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z>2.\end{cases}$$

注 这类问题的求解，主要工作是求分段函数的积分，确定上、下限以及求导数，在求导数时，要注意不仅积分上限而且被积函数也都含有变量 z. 方法二中，第一步所用的即所谓卷积公式，这是求独立随机变量和的概率密度函数的有效工具.

【例 30-10】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，Y 服从$[-\pi, \pi]$上的均匀分布，试求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数［计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示，其中，$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$］.

分析 本题考查两个相互独立的随机变量之和 $Z=X+Y$ 的概率密度函数. 可先按照两

相互独立随机变量的定义求出 X 与 Y 的联合概率密度函数，再利用卷积公式求出它们的和的概率密度函数.

解 由题意，X 和 Y 的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 X 与 Y 相互独立，所以 (X, Y) 的概率密度函数 $f(x, y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$. 从而，$Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}f_X(z-y)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y.$$

令 $t=\frac{z-y-\mu}{\sigma}$，代入上式右端，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$$

31 条件分布的求法

31.1 解题方法

Ⅰ. 二维离散型随机变量的条件分布律

(1) 设(X, Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}>0$，则在$Y=y_j$的条件下，随机变量X的条件分布律为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad (i=1, 2, \cdots).$$

(2) 同样，对于固定的i，若$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}>0$，则在$X=x_i$的条件下，随机变量Y的条件分布律为

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad (j=1, 2, \cdots).$$

Ⅱ. 二维连续型随机变量的条件概率密度

(1) 设二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)$，若对于固定的y，边缘概率密度$f_Y(y)>0$，则在$Y=y$的条件下，随机变量X的条件概率密度为

$$f_{X \mid Y}(x \mid y)=\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

条件分布函数为

$$F_{X \mid Y}(x \mid y)=P\{X \leqslant x \mid Y=y\}=\int_{-\infty}^{x} f_{X \mid Y}(x \mid y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x.$$

(2) 同样，若对于固定的x，边缘概率密度$f_X(x)>0$，则在$X=x$的条件下，随机变量Y的条件概率密度为

$$f_{Y \mid X}(y \mid x)=\frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

条件分布函数为

$$F_{Y \mid X}(y \mid x)=P\{Y \leqslant y \mid X=x\}=\int_{-\infty}^{y} f_{Y \mid X}(y \mid x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y} \frac{f(x, y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y.$$

31.2 典型题解析

【例 31-1】 设某班车起点站上客人数X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每个乘客在中途下车的概率为$p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立，以Y表示中途下车的人数，求：

(1) 在发车时有n个乘客的条件下，中途有m个乘客下车的概率；

(2) 二维随机变量(X, Y)的概率分布.

分析 (1) 计算概率$P\{Y=m \mid X=n\}$；

(2) 利用 (1) 和乘法定理计算$P\{X=n, Y=m\}(0 \leqslant m \leqslant n, n=0, 1, 2, \cdots)$.

解 (1) 在 $X=n$ 的条件下，途中有 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 个乘客下车的概率，即为在 n 次独立重复试验中，A 发生 m 次［其中 A 每次发生的概率为 $p(0<p<1)$］的概率，所以

$$P\{Y=m|X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}.$$

(2) X, Y 可能取的值为 0，1，2，…，且

当 $m>n$ 时，$P\{X=n,\ Y=m\}=0$；

当 $0\leqslant m\leqslant n$ 时，$P\{X=n,\ Y=m\}=P\{X=n\}\cdot P\{Y=m|X=n\}$

$$=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot C_n^m p^m(1-p)^{n-m}.$$

【例 31-2】 设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,\ y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}\quad(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty),$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

分析 本题为一常规题型. 利用性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 可确定常数 A，再利用定义 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,\ y)}{f_X(x)}$ 确定条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$.

解 利用泊松积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$ 可得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=A\pi,$$

故有 $A=\dfrac{1}{\pi}$. 又因为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\cdot e^{-x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

所以

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,\ y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-x)^2}.$$

注 本题也可利用正态分布的概率密度的积分为 1 来计算，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=1.$$

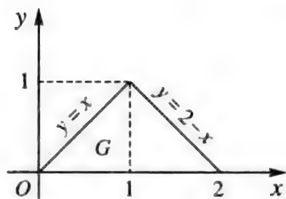
【例 31-3】 设二维随机变量$(X,\ Y)$服从区域 G 上的均匀分布，其中，G 是由 $x-y=0$，$x+y=2$ 与 $y=0$ 围成的三角形区域.

(1) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$；

(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

分析 本题主要考查在区域 G 上服从均匀分布的二维随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件概率密度的关系. 因此，要熟悉二维均匀分布，并由此求解.

解 (1) 区域 G 如右图所示. (X, Y)的概率密度为



$$f(x, y)=\begin{cases}1, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} y \\ &= \begin{cases}\int_0^x 1 \cdot \mathrm{d} y, & 0 \leqslant x<1, \\ \int_0^{2-x} 1 \cdot \mathrm{d} y, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot \mathrm{d} y, & x<0 \text{ 或 } x>2\end{cases} \\ &= \begin{cases}x, & 0 \leqslant x<1, \\ 2-x, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>2.\end{cases}\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x \\ &= \begin{cases}\int_y^{2-y} 1 \cdot \mathrm{d} x, & 0 \leqslant y<1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot \mathrm{d} x, & y<0 \text{ 或 } y \geqslant 1\end{cases} = \begin{cases}2-2y, & 0 \leqslant y<1, \\ 0, & y<0 \text{ 或 } y \geqslant 1,\end{cases}\end{aligned}$$

所以

$$f_{X \mid Y}(x \mid y)=\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\ 0 \leqslant y<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

注 根据$f(x, y)$求条件概率密度$f_{X \mid Y}(x \mid y)$时，不仅在求边缘概率密度$f_Y(y)$时要注意使$f(x, y) \neq 0$ 的积分区间，而且还要注意两点：一是只有当边缘概率密度$f_Y(y)$不为零时，条件概率密度$f_{X \mid Y}(x \mid y)$才存在；二是在随机变量 Y 取值 y 时，另一随机变量 X 的条件概率密度$f_{X \mid Y}(x \mid y)$的取值范围.

【例 31-4】 设随机变量 X 在区间$(0, 1)$上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$的条件下，随机变量 Y 在区间$(0, x)$上服从均匀分布，求：

(1) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；

(2) Y 的概率密度；

(3) 概率 $P\{X+Y>1\}$.

分析 本题是一道基本题型，只需按照公式

$$f(x, y)=f_X(x) \cdot f_{Y \mid X}(y \mid x), \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x,$$

$$P\{X+Y>1\}=\iint_{x+y>1} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

直接计算即可.

解 依题意, X 的概率密度与在 $X=x(0<x<1)$ 时关于随机变量 Y 的条件概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

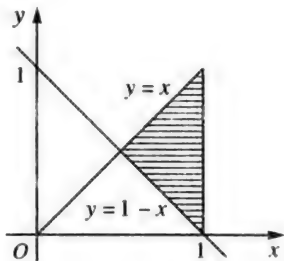
(1) X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}\displaystyle\int_y^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}0\cdot\mathrm{d}x, & y\leqslant 0\text{ 或 }y\geqslant 1\end{cases}\\&=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

(3) 如右图所示,概率



$$\begin{aligned}P\{X+Y>1\}&=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\substack{x+y>1\\0<y<x<1}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\\&=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=1-\ln 2.\end{aligned}$$

32 相互独立的正态随机变量的线性组合的分布

32.1 解题方法

在计算多维随机变量的函数的分布时，经常会用到如下重要结论：有限个独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布. 即，若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$C_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为任意常数，则有

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2\right).$$

32.2 典型题解析

【例 32-1】 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$，则________.

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$

分析 本题考查独立的正态随机变量的线性组合的一个重要结论，以及正态分布密度函数的对称性.

由于 $X\sim N(0, 1)$，$Y\sim N(1, 1)$，且 X 和 Y 相互独立，故 $Z=X+Y$ 仍服从正态分布，且 $E(Z)=0+1=1$，$D(Z)=1+1=2$，即 $Z=X+Y\sim N(1, 2)$，所以有 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$. 故 (B) 为正确答案.

解 应选(B).

【例 32-2】 已知随机变量 $X\sim N(-3, 1)$，$Y\sim N(2, 1)$，且 X, Y 相互独立，设随机变量 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$________.

分析 由于 X, Y 是相互独立的正态随机变量，故其线性组合仍服从正态分布. 又因为

$$E(Z)=E(X)-2E(Y)+7=-3-2\times 2+7=0,$$
$$D(Z)=D(X-2Y+7)=D(X)+(-2)^2 D(Y)=1+4\times 1=5,$$

所以 $Z\sim N(0, 5)$.

解 应填 $N(0, 5)$.

【例 32-3】 卡车装运水泥，设每袋水泥的质量 X（以 kg 计）服从 $N(50, 2.5^2)$，问最多装多少袋水泥，使总质量超过 2000kg 的概率不大于 0.05？

分析 本题利用了相互独立的正态随机变量的和仍服从正态分布这一结论，并由已知概率反求最多能装的袋数.

解 设最多装 m 袋，由 $X\sim N(50, 2.5^2)$ 知

$$Y = \sum_{i=1}^{m} X_i \sim N(50m,\ 2.5^2 m).$$

故

$$P\{Y > 2000\} \leqslant 0.05,\ 即\ P\{Y \leqslant 2000\} \geqslant 0.95.$$

由

$$\Phi\left(\frac{2000 - 50m}{\sqrt{m} \times 2.5}\right) \geqslant 0.95,\ 得\ \frac{2000 - 50m}{\sqrt{m} \times 2.5} \geqslant 1.64,\ 从而\ m \leqslant 39.48,$$

故最多装 39 袋.

33 随机变量及随机变量函数的数学期望与方差的求法

33.1 解题方法

Ⅰ. 随机变量的数学期望的求法

(1) 定义法: $E(X) = \sum_k x_k p_k$ (X 是离散型随机变量);

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \text{ (}X\text{ 是连续型随机变量).}$$

(2) 性质法:

① 设 X, Y 是两个随机变量, a, b, c 为常数, 则

$$E(aX+bY+c) = aE(X) + bE(Y) + c.$$

一般地, 设 X_1, X_2, …, X_n是 n 个随机变量, C_1, C_2, …, C_n是常数, 则

$$E(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i E(X_i).$$

② 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

一般地, 设 X_1, X_2, …, X_n是 n 个相互独立的随机变量, 则

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

(3) 随机变量函数的数学期望:

① $Y = g(X)$ [$g(u)$ 连续]:

X 是离散型随机变量: $E(Y) = E[g(X)] = \sum_k g(x_k)p_k$;

X 是连续型随机变量: $E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$.

② $Z = g(X, Y)$ [$g(u, v)$ 连续]:

(X, Y) 是离散型随机变量: $E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$;

(X, Y) 是连续型随机变量: $E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Ⅱ. 随机变量的方差的求法

(1) 定义法: $D(X) = E\{[X-E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2$.

(2) 性质法:

① $D(C) = 0$ (C 为任意常数);

② $D(aX+b) = a^2 D(X)$ (a, b 为任意常数);

③ $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\mathrm{cov}(X, Y)$;

若 X 与 Y 相互独立, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Ⅲ. 几个常用分布的数学期望、方差

(1) $(0-1)$分布：$E(X)=p$, $D(X)=p(1-p)$.

(2) 二项分布 $X\sim B(n,p)$：$E(X)=np$, $D(X)=np(1-p)$.

(3) 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$：$E(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$.

(4) 均匀分布 $X\sim U(a,b)$：$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

(5) 指数分布：$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ $\left(\text{概率密度函数} f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}\right)$.

(6) 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$：$E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$.

33.2 典型题解析

【例 33-1】 已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 X 的数学期望为________，方差为 ________.

分析 本题考查正态分布的概率密度函数的标准形式及其期望与方差. 由于均值为 μ、方差为 σ^2 的正态分布的概率密度函数为 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty)$，所以把 $f(x)$ 变形为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\exp\left[-\dfrac{(x-1)^2}{2\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]$，从而有 $\mu=1$，$\sigma^2=\dfrac{1}{2}$.

解 应填 1，$\dfrac{1}{2}$.

注 本题也可以按照期望和方差的定义直接计算.

【例 33-2】 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则数学期望 $E(X+e^{-2X})=$ ________.

分析 本题是求随机变量函数的数学期望的典型题目，只要根据指数分布的概率密度函数及求期望的公式即可得到答案.

因为随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 故

$$E(X+e^{-2X})=E(X)+E(e^{-2X})=1+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx$$
$$=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

解 应填 $\dfrac{4}{3}$.

【例 33-3】 设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中，X_1 在 $[0,6]$ 上服从均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$，X_3 服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布. 记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，则 $D(Y)=$ ________.

分析 利用常用分布的方差公式及方差的性质进行计算即可.

由题设知

$$D(X_1)=\frac{(6-0)^2}{12}=3,\quad D(X_2)=2^2=4,\quad D(X_3)=3,$$

且 X_1, X_2, X_3 相互独立，因此

$$D(Y)=D(X_1)+(-2)^2\cdot D(X_2)+3^2\cdot D(X_3)=3+4\times4+9\times3=46.$$

解 应填 46.

【例 33-4】 设 X, Y 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量，则随机变量 $|X-Y|$ 的数学期望 $E(|X-Y|)=$ ________.

分析 $Z=X-Y$ 是相互独立且服从正态分布的两个随机变量的线性组合，仍服从正态分布，且容易求出其期望与方差，从而将求 $E(|X-Y|)$ 转化为求一维随机变量的函数的数学期望.

因为 X, Y 相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$，故 $Z=X-Y$ 也服从正态分布，且

$$E(Z)=E(X)-E(Y)=0,\ D(Z)=D(X)+D(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

即 $Z\sim N(0,1)$. 于是

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(\frac{z^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

解 应填 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

注 本题若直接按照二维随机变量的函数求期望，则转化为二重积分

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|\cdot f(x,y)\,dxdy.$$

这样将使计算过程变得相当复杂. 因此，对于二维随机变量的函数的数字特征的计算，若能化为一维随机变量的函数再求数字特征，往往比较方便.

【例 33-5】 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫(Chebyshev) 不等式，有 $P\{|X-\mu|\geq3\sigma\}\leq$ ________.

分析 本题考查切比雪夫不等式：$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. 由题意，得

$$P\{|X-\mu|\geq3\sigma\}\leq\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}.$$

解 应填 $\frac{1}{9}$.

【例 33-6】 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，则根据切比雪夫不等式，有 $P\{|X+Y|\geq6\}\leq$ ________.

分析 根据切比雪夫不等式 $P\{|Z-E(Z)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(Z)}{\varepsilon^2}$ 知，只需求出 $Z=X+Y$ 的期望和方差即可. 因为

$$E(Z)=E(X)+E(Y)=-2+2=0,$$

$$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$$
$$=1+4+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=5+2\times(-0.5)\times1\times2=3;$$

所以

$$P\{|X+Y|\geqslant6\}=P\{|Z-E(Z)|\geqslant6\}\leqslant\frac{D(Z)}{6^2}=\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12}.$$

解 应填 $\frac{1}{12}$.

【例 33-7】 设 X 是一随机变量，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$（μ，$\sigma>$均为常数），则对任意常数 c，必有________.

(A) $E[(X-c)^2]=E(X^2)-c^2$　　(B) $E[(X-c)^2]=E[(X-\mu)^2]$

(C) $E[(X-c)^2]<E[(X-\mu)^2]$　　(D) $E[(X-c)^2]\geqslant E[(X-\mu)^2]$

分析 本题是考查随机变量的数学期望计算的题型.

$$E[(X-c)^2]=E\{[(X-\mu)+(\mu-c)]\}^2$$
$$=E[(X-\mu)^2+(\mu-c)^2+2(X-\mu)(\mu-c)]$$
$$=E[(X-\mu)^2]+(\mu-c)^2+2[E(X)-\mu](\mu-c)$$
$$=E[(X-\mu)^2]+(\mu-c)^2\geqslant E[(X-\mu)^2].$$

故应选(D).

解 应选(D).

注 由于 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$，上式表明 $E\{(X-c)^2\}$当 $c=E(X)$时取到最小值.

【例 33-8】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $E(X)=$________.

(A) 0　　(B) 0.3　　(C) 0.7　　(D) 1

分析 本题应先求出随机变量 X 的概率密度，再按照定义计算 $E(X)$.

依题意，X 的概率密度

$$f(x)=F'(x)=0.3\varphi(x)+0.35\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

于是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}0.3x\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}0.35x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{令}\frac{x-1}{2}=t}\int_{-\infty}^{+\infty}0.7(2t+1)\varphi(t)\mathrm{d}t$$
$$=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}2t\varphi(t)\mathrm{d}t+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=0.7.$$

解 应选(C).

【例 33-9】 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant2)$ 为来自该总体的简单随机样本，则对统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有________.

(A) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$　　(B) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$

(C) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$　　(D) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$

分析　按照期望和方差的性质直接计算即可. 本题用到泊松分布的结论: $E(X_i) = D(X_i) = \lambda\ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, 且 $E(X_i) = D(X_i) = \lambda\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 所以

$$E(T_1) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n\lambda = \lambda,$$

$$E(T_2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + \frac{1}{n}E(X_n) = \lambda + \frac{\lambda}{n}.$$

故 $E(T_1) < E(T_2)$. 又因为

$$D(T_1) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n},$$

$$D(T_2) = D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n}X_n\right) = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} D(X_i) + \frac{1}{n^2}D(X_n)$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\cdot(n-1)\lambda + \frac{1}{n^2}\cdot\lambda = \frac{\lambda}{n}\cdot\left(\frac{n}{n-1} + \frac{1}{n}\right) > \frac{\lambda}{n} = D(T_1),$$

故选(D).

解　应选(D).

【例 33-10】 掷 12 颗骰子, 求出现的点数之和的数学期望与方差.

分析　本题的关键是将点数之和这个随机变量分解为 12 个简单随机变量的和的形式, 这是一个重要的解题技巧, 应掌握.

解　设 X 为出现的点数之和, $X_i\,(i = 1, 2, \cdots, 12)$ 为第 i 颗骰子出现的点数, 则 $X = \sum_{i=1}^{12} X_i$, 且 $X_1, X_2, \cdots, X_{12}$ 相互独立; 又因为 $X_i\,(i=1, 2, \cdots, 12)$ 的分布律为

X_i	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以

$$E(X_i) = \frac{7}{2},\ E(X_i^2) = \frac{91}{6},\ D(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{35}{12},$$

从而

$$E(X) = \sum_{i=1}^{12} E(X_i) = \frac{7}{2}\times 12 = 42,\ D(X) = \sum_{i=1}^{12} D(X_i) = \frac{35}{12}\times 12 = 35.$$

【例 33-11】 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

分析 由于 $Y\sim B(4,p)$，其中，$p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}$，所以只需求出 p 的值即可求得 $E(Y^2)$.

解 由于 Y 表示对 X 独立地重复观察的 4 次中观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，所以 $Y\sim B(4,p)$，其中

$$p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{1}{2},$$

即 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，于是

$$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(4\times\frac{1}{2}\right)^2=5.$$

【例 33-12】 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产的产品个数为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

分析 本题应先确定 X 的分布律，再按照定义或计算公式求 $E(X)$，$D(X)$.

解 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\quad(k=1,2,\cdots),$$

所以

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{+\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}\\&=-p\sum_{k=1}^{+\infty}[(1-p)^k]'=-p\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right]'=-p\left(\frac{1}{p}-1\right)'\\&=-p\left(-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p}.\end{aligned}$$

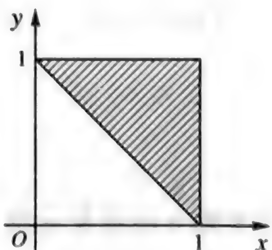
因为

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{+\infty}[(k+1)k-k](1-p)^{k-1}\\&=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1)(1-p)^{k-1}-p\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}\\&=p\sum_{k=1}^{+\infty}[(1-p)^{k+1}]''-\frac{1}{p}=p\left[\frac{(1-p)^2}{p}\right]''-\frac{1}{p}=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p},\end{aligned}$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\left(\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}.$$

【例 33-13】 如右图所示，设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量 $Z=X+Y$ 的方差.



分析 本题应用随机变量函数的期望公式

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

直接计算 $E(Z)$ 及 $E(Z^2)$，再利用 $D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2$ 计算方差即可.

解 设三角形区域为 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 1-x\leqslant y\leqslant 1\}$，则随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$ 由于

$$E(Z)=E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 2(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^1(x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$E(Z^2)=E[(X+Y)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 2(x+y)^2\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{6},$$

故

$$D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\frac{11}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

【例 33-14】 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作. 若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生两次故障所获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元. 求一周内期望利润是多少?

分析 本题的关键是要正确地列出所获利润与故障天数之间的函数关系式，而故障天数是一随机变量，服从二项分布.

解 以 X 表示一周 5 天内机器发生故障的天数，则 X 服从二项分布：$X\sim B(5,0.2)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_5^k\times 0.2^k\times 0.8^{5-k}\quad (k=0,1,2,3,4,5),$$

即

$$P\{X=0\}=0.8^5=0.328,$$
$$P\{X=1\}=\mathrm{C}_5^1\times 0.2\times 0.8^4=0.410,$$
$$P\{X=2\}=\mathrm{C}_5^2\times 0.2^2\times 0.8^3=0.205,$$
$$P\{X\geqslant 3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}=0.057.$$

以 Y 表示所获利润，则

$$Y=f(X)=\begin{cases}10, & X=0,\\ 5, & X=1,\\ 0, & X=2,\\ -2, & X\geqslant 3.\end{cases}$$

于是

$$E(Y)=10\times P\{X=0\}+5\times P\{X=1\}+0\times P\{X=2\}+(-2)\times P\{X\geqslant 3\}$$
$$=10\times 0.328+5\times 0.410+0\times 0.205+(-2)\times 0.057=5.216\ (\text{万元}).$$

34 两个随机变量的协方差与相关系数的求法

34.1 解题方法

计算两个随机变量的协方差与相关系数，只需按照公式及相应的性质直接计算即可.

Ⅰ. X 与 Y 的协方差

$$\operatorname{cov}(X, Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y).$$

性质：

(1) $\operatorname{cov}(X, Y)=\operatorname{cov}(Y, X)$；

(2) $\operatorname{cov}(aX, bY)=ab\operatorname{cov}(X, Y)$；

(3) $\operatorname{cov}(X_1+X_2, Y)=\operatorname{cov}(X_1, Y)+\operatorname{cov}(X_2, Y)$；

(4) 若 X 与 Y 独立，则 $\operatorname{cov}(X, Y)=0$.

注 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X, Y)$.

Ⅱ. X 与 Y 的相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

若 $\rho_{XY}=0$，则称 X 与 Y 不相关.

34.2 典型题解析

【例 34-1】 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y$，$\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为 ________.

(A) $E(X)=E(Y)$　　(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$　　(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

分析 本题应从 $\operatorname{cov}(\xi, \eta)=0$ 的条件入手.

设 $(X, Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则 $X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 所以

$$\begin{aligned}D(\xi)&=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X, Y)\\&=\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\rho>\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2=(\sigma_1-\sigma_2)^2\geqslant 0,\\D(\eta)&=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\operatorname{cov}(X, Y)\\&=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho>\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2=(\sigma_1-\sigma_2)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

因此，ξ，η 不相关的充分必要条件为 $\operatorname{cov}(\xi, \eta)=0$，而

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi, \eta)&=\operatorname{cov}(X+Y, X-Y)=\operatorname{cov}(X, X)-\operatorname{cov}(X, Y)+\operatorname{cov}(Y, X)-\operatorname{cov}(Y, Y)\\&=D(X)-D(Y),\end{aligned}$$

所以，ξ，η 不相关的充分必要条件为 $D(X)=D(Y)$，即

$$E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2.$$

故本题应选(B).

解 应选(B).

注 (1) 随机变量 X 与 Y 不相关定义为相关系数 $\rho_{XY}=0$. 因此，当 $D(X)>0$, $D(Y)>0$ 时，X 与 Y 不相关的充要条件为 $\text{cov}(X, Y)=0$.

(2) 随机变量 X 与 Y 不相关是 X 与 Y 相互独立的必要而非充分条件. 但当 (X, Y) 服从二维正态分布时，X 与 Y 不相关是 X 与 Y 相互独立的充要条件.

【例 34-2】 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于 ________.

(A) -1　　(B) 0　　(C) 0.5　　(D) 1

分析 利用 $Y=n-X$ 即可得到正确选项.

由于 X 和 Y 都服从二项分布 $B(n, 0.5)$，其中，$Y=n-X$，所以

$$D(X)=D(Y)=n\times 0.5\times(1-0.5)=0.25n\neq 0,$$

$$\text{cov}(X, Y)=\text{cov}(X, n-X)=\text{cov}(X, -X)=-\text{cov}(X, X)=-D(X),$$

因此，X 和 Y 的相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-D(X)}{D(X)}=-1.$$

解 应选(A).

【例 34-3】 设随机变量 $X\sim N(0, 1)$, $Y\sim N(1, 4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则________.

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

分析 本题考查相关系数的性质. 由于 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=1>0$，所以 $P\{Y=aX+b\}=1$，且 $a>0$. 又因为 $Y\sim N(1, 4)$, $X\sim N(0, 1)$，所以 $E(X)=0$, $E(Y)=1$，从而由 $E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b=1$ 知 $b=1$. 故应选(D).

解 应选(D).

【例 34-4】 设随机变量 X 和 Y 均服从正态分布，且它们不相关，则 ________.

(A) X 与 Y 一定独立　　(B) (X, Y) 服从二维正态分布

(C) X 与 Y 未必独立　　(D) $X+Y$ 服从一维正态分布

分析 本题考查正态分布的性质以及二维正态分布与一维正态分布之间的关系. 只有当 (X, Y) 服从二维正态分布时，不相关与独立才是等价的.

只有当 (X, Y) 服从二维正态分布时，X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 独立.

本题仅仅已知 X 和 Y 均服从正态分布，因此，由它们不相关推不出 X 与 Y 一定独立，可排除(A)；

若 X 和 Y 均服从正态分布且相互独立，则 (X, Y) 服从二维正态分布，但题设并不知道 X, Y 是否独立，可排除(B)；

同样地，只有要求 X 与 Y 相互独立时，才能推出 $X+Y$ 服从一维正态分布，可排除(D). 故正确选项为(C).

解 应选(C).

注 (1) 若 X 与 Y 均服从正态分布且相互独立，则 (X, Y) 服从二维正态分布.

(2) 若 X 与 Y 均服从正态分布且相互独立，则 $aX+bY$ 服从一维正态分布.

(3) 若 (X, Y) 服从二维正态分布，则 X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关.

【例 34-5】 设随机变量(X, Y)服从二维正态分布，且X与Y不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$分别表示X，Y的概率密度，则在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为 ________.

(A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$ (C) $f_X(x)f_Y(y)$ (D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

分析 本题考查二维正态分布的性质.

由于(X, Y)服从二维正态分布，因此，由X与Y不相关可知X与Y相互独立，于是有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x).$$

故应选(A).

解 应选(A).

【例 34-6】 设二维离散型随机变量(X, Y)的分布律为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求$P\{X=2Y\}$；(2) 求$\text{cov}(X-Y, Y)$.

分析 (1) 利用分布律直接计算$P\{X=2Y\}$；(2) 利用性质或定义计算即可.

解 (1) 由随机变量(X, Y)的分布律可知

$$P\{X=2Y\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=2, Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}.$$

(2) 方法一：由(X, Y)的分布律可得X，Y，XY的分布律分别为

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	4
p_k	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

从而

$$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3},$$

$$E(Y)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1,$$

$$E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$E(XY)=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.$$

又因为 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$，于是

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X-Y,\ Y)&=\operatorname{cov}(X,\ Y)-\operatorname{cov}(Y,\ Y)\\&=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y)\\&=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

方法二：

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X-Y,\ Y)&=E[(X-Y)Y]-E(X-Y)E(Y)\\&=E(XY)-E(Y^2)-E(X)E(Y)+[E(Y)]^2\\&=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\times1+1=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

【例 34-7】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\bar{X}\ (i=1, 2, \cdots, n)$. 求：

（1）Y_i 的方差 $D(Y_i)\ (i=1, 2, \cdots, n)$；

（2）Y_1 与 Y_n 的协方差 $\operatorname{cov}(Y_1, Y_n)$.

分析 本题只要按照方差和协方差的性质以及结论 $E(\bar{X})=E(X)$，$D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}$ 计算即可.

解（1）

$$\begin{aligned}D(Y_i)&=D(X_i-\bar{X})=D\left(\frac{n-1}{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}X_j\right)\\&=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}D(X_j)\quad（因为 X_1, X_2, \cdots, X_n 相互独立）\\&=\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot1^2+\frac{n-1}{n^2}\cdot1^2=\frac{n-1}{n}\quad(i=1, 2, \cdots, n).\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_1, Y_n)&=\operatorname{cov}(X_1-\bar{X}, X_n-\bar{X})\\&=\operatorname{cov}(X_1, X_n)-\operatorname{cov}(X_1, \bar{X})-\operatorname{cov}(X_n, \bar{X})+\operatorname{cov}(\bar{X}, \bar{X})\\&=0-2\operatorname{cov}\left(X_1, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)+D(\bar{X})\\&=-2\operatorname{cov}\left(X_1, \frac{1}{n}X_1\right)+D(\bar{X})\\&=-\frac{2}{n}D(X_1)+D(\bar{X})\\&=-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

35 中心极限定理的应用

35.1 解题方法

应用两个中心极限定理计算概率时，要分清两个定理的条件，明确使用的是哪一个定理. 它们的区别是：棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre - Laplace)定理（二项分布以正态分布为其极限分布）指的是随机变量 X_n 服从参数为 n, p 的二项分布，当 n 比较大时，X_n 近似服从正态分布 $N(np, np(1-p))$，涉及的是一个随机变量；而列维-林德伯格(Levy - Lindberg 定理（独立同分布的中心极限定理）指的是对于大量（n 个）相互独立同分布、数学期望和方差存在的随机变量 X_1, X_2, …, X_n，当 n 充分大时，它们的和近似服从正态分布 $N(nE(X_i), nD(X_i))$，涉及的是一个相互独立同分布、期望和方差存在的随机变量序列.

35.2 典型题解析

【例 35-1】 设 X_n 表示 n 次独立重复试验中事件 A 出现的次数，p 是事件 A 在每次试验中出现的概率，则 $P\{a<X_n<b\}\approx$ ________.

分析 本题考查棣莫弗-拉普拉斯定理. 由

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

知

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{a<\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}}\leqslant b\right\}=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

故

$$P\{a<X_n<b\}=P\left\{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}<\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right\}\approx\int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

解 应填 $\int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

【例 35-2】 一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件组成，在整个运行期间，每个部件损坏的概率为 0.10，为了使整个系统起作用，至少必须有 85 个部件正常工作，求整个系统起作用的概率.

分析 本题是棣莫弗-拉普拉斯定理的一个简单应用. 将每个部件看作一次试验，在整个运行期间，每个部件的完好率（即可靠性）为 0.9.

解 记 $X_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 个部件在整个运行期间工作,\\ 0, & 第\ i\ 个部件在整个运行期间损坏,\end{cases}$ $i=1, 2, \cdots, 100$. 由题设知，X_1, X_2, …, X_{100} 相互独立，且 $P\{X_i=1\}=0.90$, $P\{X_i=0\}=0.10$. 记 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$，显然，

$X\sim B(100, 0.9)$，由棣莫弗-拉普拉斯定理，$\dfrac{X-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}$近似地服从 $N(0, 1)$，从而

$$P\{X>85\}=1-P\{X\leqslant 85\}=1-P\left\{\frac{X-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}\leqslant\frac{85-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.9525.$$

【例 35-3】 保险公司多年的资料统计表明，在索赔户中，被盗索赔户占 20%. 在随意抽查的 100 家索赔户中，被盗的索赔户数为随机变量 X.

（1）写出 X 的概率分布；

（2）利用棣莫弗-拉普拉斯定理，求被盗的户数不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

分析 （1）把对索赔户的观察作为一次试验，随意抽查 100 个索赔户可看作 $n=100$ 的伯努利试验，可知 $X\sim B(100, 0.2)$.

（2）求出 $E(X)$，$D(X)$，利用棣莫弗-拉普拉斯定理，对 $P\{14\leqslant X\leqslant 30\}$进行估算.

解 （1）根据题意，索赔户数 X 服从二项分布 $B(n, p)$，其中，$n=100$，$p=0.2$，即 $X\sim B(100, 0.2)$，所以 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=C_{100}^{k}\times 0.2^{k}\times 0.8^{100-k}\quad (k=0, 1, 2, \cdots, 100)$$

（2）因为 $E(X)=np=20$，$D(X)=np(1-p)=16$，由棣莫弗-拉普拉斯定理得所求概率为

$$P\{14\leqslant X\leqslant 30\}=P\left\{-1.5\leqslant\frac{X-20}{4}\leqslant 2.5\right\}=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)$$

$$=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1=0.9938+0.9332-1=0.9270.$$

【例 35-4】 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的质量是随机的. 假设平均每箱的质量为 50kg，标准差为 5kg. 若用最大载重量为 5t 的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977. [$\Phi(2)=0.977$，其中，$\Phi(x)$是标准正态分布函数.]

分析 本题是中心极限定理的一个简单应用. 首先找出一组独立同分布的随机变量序列（这里为每箱的质量），则根据列维-林德伯格中心极限定理知，其和（总质量）的极限分布为正态分布，因此，其和近似服从正态分布，且正态分布的期望与方差可以直接通过和式计算出来.

解 设 $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$是装运的第 i 箱的质量(单位：kg)，n 是所求的箱数. 由题设，可以将 $X_1, X_2, \cdots, X_n$视为独立同分布的随机变量，而 n 箱的总质量

$$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

是独立同分布的随机变量之和.

由题设，有

$$E(X_i)=50,\ \sqrt{D(X_i)}=5;\ E(S_n)=50n,\ \sqrt{D(S_n)}=5\sqrt{n}.\quad (\text{单位：kg})$$

根据列维-林德伯格中心极限定理，知 S_n近似服从正态分布 $N(50n, 25n)$. 而箱数 n 根据下述条件确定：

$$P\{S_n \leqslant 5000\} = P\left\{\frac{S_n - 50n}{5\sqrt{n}} \leqslant \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2),$$

由此得 $\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$，从而 $n < 98.0199$，即最多可以装 98 箱.

注 对于独立同分布的中心极限定理，关键是掌握其基本思想，而不应只记住其公式. 事实上，其核心结论是：独立同分布随机变量的和的极限分布是正态分布，且正态分布的期望与方差可直接通过其和式进行计算. 得到正态分布后，再通过标准化计算概率则是常规问题.

36 正态总体的一些常用抽样分布

36.1 解题方法

本部分的关键是牢记三个常用统计量的结构，并可据此来证明一些相关统计量的分布；掌握正态总体的样本均值与样本方差的分布.

Ⅰ. 三种常用的抽样分布

(1) χ^2-分布：若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且同服从正态分布 $N(0, 1)$，则

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n).$$

(2) t-分布：若随机变量 $X \sim N(0, 1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X, Y 相互独立，则

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n).$$

(3) F-分布：若 $U \sim \chi^2(n_1)$，$V \sim \chi^2(n_2)$，且 U, V 相互独立，则

$$F = \frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}} \sim F(n_1, n_2).$$

Ⅱ. 正态总体的样本均值与样本方差的分布

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的一个样本，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2为样本方差，则

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left((\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$，或$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$；

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

(3) $\bar{X}$ 与 S^2相互独立；

(4) $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$.

Ⅲ. 三个重要结论

设总体 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则

(1) $E(\bar{X})=\mu$;

(2) $D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$;

(3) $E(S^2)=\sigma^2$.

36.2 典型题解析

【例 36-1】 设 X_1, X_2, X_3, X_4是来自正态总体 $N(0, 2^2)$的简单随机样本，统计量 X 为

$$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2,$$

则当 $a=$________, $b=$________ 时，统计量 X 服从χ^2分布，自由度为________.

分析 本题属于抽样分布的类型题，且已明确要求统计量 X 服从χ^2分布，故可直接根据χ^2分布的定义得到结论.

依题意，有 X_1, X_2, X_3, X_4相互独立且同服从正态分布 $N(0, 2^2)$，因此，X_1-2X_2与$3X_3-4X_4$也相互独立且分别服从正态分布 $N(0, 20)$与 $N(0, 100)$. 因此，$\dfrac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}$与$\dfrac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}$都服从标准正态分布 $N(0, 1)$. 根据χ^2分布的应用模式，有

$$X=\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}\sim\chi^2(2).$$

即当 $a=\dfrac{1}{20}$, $b=\dfrac{1}{100}$时，X 服从χ^2分布，其自由度为2.

解 应填 $\dfrac{1}{20}$, $\dfrac{1}{100}$, 2.

【例 36-2】 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(0, 3^2)$, X_1, X_2, $\cdots$, X_9和 Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_9是总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从________分布，参数为________.

分析 本题考查 t 统计量的分布，应牢记.

由 $X_i\sim N(0, 3^2)$ $(i=1, 2, \cdots, 9)$ 知 $X_1+X_2+\cdots+X_9\sim N(0, 9^2)$，所以

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9}\sim N(0, 1);$$

由 $Y_i\sim N(0, 3^2)$ $(i=1, 2, \cdots, 9)$ 知$\dfrac{Y_i}{3}\sim N(0, 1)$ $(i=1, 2, \cdots, 9)$，所以

$$\left(\frac{Y_1}{3}\right)^2+\left(\frac{Y_2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_9}{3}\right)^2=\frac{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}{9}\sim\chi^2(9).$$

又因为$\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9}$与$\dfrac{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}{9}$相互独立，从而

$$U=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}=\frac{\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)}{9}}{\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}{9}\right)}{9}}}\sim t(9).$$

解 应填 t, 9.

【例 36-3】 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$及$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$为分别来自两个独立的正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$及$N(\mu_2, \sigma^2)$的两个样本，其样本（无偏）方差分别为S_1^2及S_2^2，则统计量$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$服从分布 ________.

分析 本题考查F统计量的分布，应牢记.

因为$\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，且$\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}$与$\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}$独立，

所以 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}=\dfrac{\dfrac{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}}{n-1}}{\dfrac{\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}}{m-1}}\sim F(n-1, m-1)$. 故应填 $F(n-1, m-1)$.

解 应填 $F(n-1, m-1)$.

【例 36-4】 设总体X服从正态分布$N(0, 2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{15}$是来自X的简单随机样本，则随机变量$Y=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$服从________分布，参数为________.

分析 因为样本与总体同分布，故每个X_i均服从正态分布，进而经标准化可得到服从标准正态分布的随机变量，而独立的标准正态随机变量的平方和服从χ^2分布，从而随机变量的分子与分母均可凑成符合χ^2分布的情形.

因为$X_1, X_2, \cdots, X_{15}$是总体X的样本，所以$X_i\sim N(0, 2^2)$ $(i=1, 2, \cdots, 15)$，且$X_1, X_2, \cdots, X_{10}, X_{11}, \cdots, X_{15}$相互独立. 将其标准化，得$\dfrac{X_i}{2}\sim N(0, 1)$. 再由$\chi^2$分布的定义，有

$$Y_1=\frac{1}{4}(X_1^2+\cdots+X_{10}^2)\sim\chi^2(10),\quad Y_2=\frac{1}{4}(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)\sim\chi^2(5).$$

显然，Y_1与Y_2独立. 由F分布的定义，知

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}=\frac{\dfrac{\frac{1}{4}(X_1^2+\cdots+X_{10}^2)}{10}}{\dfrac{\frac{1}{4}(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}{5}}\sim F(10, 5).$$

解 应填 F, $(10, 5)$.

【例 36-5】 设X_1, X_2, X_3, X_4为来自总体$N(1, \sigma^2)$的简单随机样本，则统计量$\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$的分布为________.

(A) $N(0, 1)$　　(B) $t(1)$　　(C) $\chi^2(1)$　　(D) $F(1, 1)$

分析 本题考查t统计量的分布，应牢记.

因为$X_i\sim N(1, \sigma^2)$ $(i=1, 2, 3, 4)$，所以$X_1-X_2\sim N(0, 2\sigma^2)$，$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0, 1)$；

$X_3+X_4\sim N(2,2\sigma^2)$, $X_3+X_4-2\sim N(0,2\sigma^2)$, $\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$, $\dfrac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$.

又因为 X_1, X_2, X_3, X_4相互独立，所以$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$与$\dfrac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}$ 也相互独立，于是

$$\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}=\frac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}}}\sim t(1).$$

解 应选择(B).

【例 36-6】 设随机变量 $X\sim t(n)$, $Y\sim F(1,n)$, 给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$, 则 $P\{Y>c^2\}=$________.

(A) α　　(B) $1-\alpha$　　(C) 2α　　(D) $1-2\alpha$

分析 本题考查 t 分布的密度函数的性质，以及服从 t 分布的统计量与服从 F 分布的统计量的关系.

因为 $X\sim t(n)$，所以 $P\{X>0\}=0.5$；而 $0<\alpha<0.5$，且 $P\{X>c\}=\alpha$，可知 $c>0$；

当 $X\sim t(n)$时，$X^2\sim F(1,n)$，又因为 $Y\sim F(1,n)$，故知 Y 与 X^2同分布. 所以

$$P\{Y>c^2\}=P\{X^2>c^2\}=P\{|X|>c\}=P\{X<-c\}+P\{X>c\}=2P\{X>c\}=2a.$$

解 应选择(C).

注 本题利用了 t 分布的密度函数的图形关于 $t=0$ 对称的性质.

【例 36-7】 设样本 X_1, X_2, …, X_6来自总体 $N(0,1)$, $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$, 试确定常数 C，使得 CY 服从χ^2分布.

分析 本题属于抽样分布的类型题，但已明确要求统计量 CY 服从χ^2分布，可直接根据χ^2分布的定义，确定常数 C.

解 因为 X_1, X_2, …, X_6是总体 $N(0,1)$的样本，故

$$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3),\ X_4+X_5+X_6\sim N(0,3),$$

且两者相互独立. 因此

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\sim N(0,1),\quad \frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\sim N(0,1),$$

且两者相互独立. 由χ^2分布的定义，有

$$\frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{3}+\frac{(X_4+X_5+X_6)^2}{3}\sim\chi^2(2),$$

即$\dfrac{1}{3}Y\sim\chi^2(2)$，即得 $C=\dfrac{1}{3}$.

【例 36-8】 设样本 X_1, X_2, …, X_5来自总体 $N(0,1)$, $Y=\dfrac{C(X_1+X_2)}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{\frac{1}{2}}}$，试确定常数 C，使得 Y 服从 t 分布.

分析 本题属于抽样分布的类型题，但已明确要求统计量 Y 服从 t 分布，可直接根据 t 分布的定义，确定常数 C.

解 因 $X_1, X_2, \cdots, X_5$是总体 $N(0, 1)$的样本，故 $X_1+X_2 \sim N(0, 2)$，即有

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1).$$

而

$$X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3),$$

且$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$与 $X_3^2+X_4^2+X_5^2$相互独立，于是

$$\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3}}}=\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{X_1+X_2}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{\frac{1}{2}}} \sim t(3),$$

因此，所求的常数 $C=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

【例 36-9】 从正态总体 $N(3.4, 6^2)$中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间$(1.4, 5.4)$内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大?

附表　标准正态分布表 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	1.280	1.645	1.960	2.330
$\Phi(x)$	0.900	0.950	0.975	0.990

分析 本题考查正态总体样本均值 $\bar{X}$ 的分布，应牢记.

解 由 $X \sim N(3.4, 6^2)$ 知 $\bar{X} \sim N\left(3.4, \frac{6^2}{n}\right)$，故

$$P\{1.4<\bar{X}<5.4\}=P\{|\bar{X}-3.4|<2\}=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right|<\frac{2\sqrt{n}}{6}\right\}=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1 \geqslant 0.95,$$

得 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geqslant 0.975=\Phi(1.96)$，所以$\frac{\sqrt{n}}{3} \geqslant 1.96$，即 $n \geqslant (1.96 \times 3)^2 \approx 34.57$. 故 n 至少应取 35.

【例 36-10】 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，从该总体中抽取简单随机样本 X_1, $X_2, \cdots, X_{2n}(n \geqslant 2)$，其样本均值为 $\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$的数学期望 $E(Y)$.

分析 对本题，可将样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$视为两部分，$X_1, X_2, \cdots, X_n$与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots, X_{2n}$，以 $\bar{X}_1, \bar{X}_2$分别表示它们的样本均值，即

$$\bar{X}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{X}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n+i},$$

则有 $2\bar{X}=\bar{X}_1+\bar{X}_2$. 再利用样本方差的性质，有

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_1)^2\right] = \sigma^2,$$

从而

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_1)^2\right] = (n-1)\sigma^2.$$

类似地，可得

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{n+i} - \bar{X}_2)^2\right] = (n-1)\sigma^2.$$

解 $Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}[(X_i - \bar{X}_1) + (X_{n+i} - \bar{X}_2)]^2$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(X_i - \bar{X}_1)^2 + 2(X_i - \bar{X}_1)(X_{n+i} - \bar{X}_2) + (X_{n+i} - \bar{X}_2)^2],$$

$$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_1)^2\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{n+i} - \bar{X}_2)^2\right] + 2\sum_{i=1}^{n}E[(X_i - \bar{X}_1)(X_{n+i} - \bar{X}_2)],$$

由于 $X_i - \bar{X}_1$ 与 $X_{n+i} - \bar{X}_2$ 独立，且

$$E[(X_i - \bar{X}_1)(X_{n+i} - \bar{X}_2)] = E(X_i - \bar{X}_1)\cdot E(X_{n+i} - \bar{X}_2) = 0,$$

于是

$$E(Y) = (n-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 + 0 = 2(n-1)\sigma^2.$$

37 矩估计法与最大似然估计法

37.1 解题方法

矩估计法与最大似然估计法是点估计中的两种重要方法，掌握其基本思想和解题步骤是解题的关键.

Ⅰ. 矩估计法

矩估计法的基本思想就是用样本的矩估计总体相应的矩，用样本矩的函数估计总体相应矩的函数. 两种常见情形的具体解法：

(1) 当总体中只有一个未知参数 θ 时，应首先求出总体的数学期望 $E(X)$，然后令 $E(X)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，即 $E(X)=\bar{X}$，由此可解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

(2) 当总体中含有两个未知参数 θ_1，θ_2 时，应先求出总体的 $E(X)$ 与 $E(X^2)$，再令 $\begin{cases}E(X)=\bar{X},\\ E(X^2)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2,\end{cases}$ 由此可解得 θ_1，θ_2 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$.

Ⅱ. 最大似然估计法

(1) 似然函数：若总体 X 为连续型随机变量，概率密度函数为 $f(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$，则似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta).$$

若总体 X 为离散型随机变量，分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$，则似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta).$$

(2) 最大似然估计：若有 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}\{L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\},$$

则称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ 的最大似然估计值，$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的最大似然估计量.

(3) 具体计算步骤：

① 写出似然函数 $L(\theta)$；

② 求出对数似然函数 $\ln L(\theta)$；

③ 列出对数似然方程 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$；

④ 解对数似然方程，得到 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，由此写出相应的最大似然估计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

注 (1) 一般地，最大似然估计可通过解似然方程得到；若似然方程无解，可根据最大似然估计法的定义找到 $\hat{\theta}$.

(2) 以上方法也适用于含有两个或多个未知参数的情形，所不同的是，似然方程中要对参数求偏导数，得到的是似然方程组.

37.2 典型题解析

【例 37-1】 设总体 X 的分布律为

X	0	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中，$\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$是未知参数，利用总体 X 的样本值3，1，3，0，3，1，2，3. 求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

分析 本题考查一个未知参数的矩估计法和最大似然估计法. 利用 $E(X)=\bar{x}$（$\bar{x}$ 是样本值的均值）即可得 θ 的矩估计值. 写出 θ 的似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$（本题的总体是离散型的），并用规定方法求得 θ 的最大似然估计值.

解 $E(X)=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$,

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2.$$

令 $E(X)=\bar{x}$，得 $3-4\theta=2$. 解得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta)&=(1-2\theta)\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-2\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)\\&=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,\end{aligned}$$

则

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta).$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{2(12\theta^2-14\theta+3)}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0,$$

解得 $\theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$或$\theta=\frac{7+\sqrt{13}}{12}$，而 $\theta=\frac{7+\sqrt{13}}{12}$不符合题设 $\theta<\frac{1}{2}$. 故对于所给的样本值，θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

【例 37-2】 设总体 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中，$\theta>-1$ 是未知参数，x_1，x_2，…，x_n是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和最大似然估计法求 θ 的估计量.

分析 本题考查连续型总体中参数的矩估计法和最大似然估计法. 只要按照这两种估计方法的计算步骤进行计算即可.

解 (1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$, $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,

令 $E(X)=\bar{X}$，即$\frac{\theta+1}{\theta+2}=\bar{X}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$.

（2）似然函数为 $L(\theta)=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^\theta \quad (0<x_i<1;\ i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

【例 37-3】 设总体 X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中小于 1 的个数.

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量.

分析 本题考查一个未知参数的矩估计法和最大似然估计法. 只要按照这两种估计方法的计算步骤进行计算即可.

解 （1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\theta\mathrm{d}x+\int_1^2 x(1-\theta)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\theta$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

令 $E(X)=\bar{X}$，即$\frac{3}{2}-\theta=\bar{X}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\bar{X}$.

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^N\cdot(1-\theta)^{n-N},$$

则

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta).$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$，解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$，最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.

【例 37-4】 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$ 其中，$\theta>0$为未知参数. 又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

分析 本题考查参数的最大似然估计法，直接计算即可. 注意本题中的似然函数为单

调函数，需要利用最大似然估计值的定义直接求得.

解 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n>\theta),$$

则

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta.$$

由$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2n>0$知$L(\theta)$单调增加. 从而当$\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$时，$L(\theta)$取得最大值. 因此，$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

【例 37-5】 设总体X的分布函数为$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^\beta}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$其中，未知参数$\beta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本. 求：(1) β的矩估计量；(2) β的最大似然估计量.

分析 本题的已知条件中，给出的是总体X的分布函数$F(x;\beta)$，而非概率密度函数，故应首先求出X的概率密度函数$f(x;\beta)$，再按照上述步骤进行计算.

解 X的概率密度为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

(1) 由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\beta-1},$$

令$\frac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$，解得参数$\beta$的矩估计量为$\hat{\beta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$.

(2) 似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i>1\ (i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$x_i>1\ (i=1,2,\cdots,n)$时，$L(\beta)>0$. 取对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

两边对β求导，得$\frac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$. 令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=0$，解得$\beta$的最大似然估计值为$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$. 故$\beta$的最大似然估计量为$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

【例 37-6】 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差$D(\hat{\theta})$;

(3) 讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性和相合性（一致性）.

分析 本题中所求的矩估计量 $\hat{\theta}$ 可直接按照矩估计法的步骤直接求得，而 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$可由总体方差 $D(X)$求得，$\hat{\theta}$ 的无偏性和相合性（一致性）可由定义直接讨论.

解 (1)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}.$$

令 $E(X)=\bar{X}$，即$\dfrac{\theta}{2}=\bar{X}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\bar{X}$.

(2)

$$D(\hat{\theta})=D(2\bar{X})=4D(\bar{X})=\frac{4D(X)}{n}.$$

又因为

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{3\theta^2}{10},$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3\theta^2}{10}-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{20}.$$

从而 $D(\hat{\theta})=\dfrac{\theta^2}{5n}$.

(3) 因为

$$E(\hat{\theta})=E(2\bar{X})=2E(\bar{X})=2E(X)=2\times\frac{\theta}{2}=\theta,$$

故 $\hat{\theta}=2\bar{X}$ 为 θ 的无偏估计量. 又因为 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}E(X)$，则 $\hat{\theta}=2\bar{X}\xrightarrow{P}2E(X)=\theta$. 故 $\hat{\theta}=2\bar{X}$ 为 θ 的一致估计量.

38 单个正态总体均值与方差的置信区间

38.1 解题方法

求单个正态总体的均值与方差的置信区间，只需按照下列结论直接套用即可.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$为样本均值，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$为样本方差，则

(1) σ^2已知时，μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right);$$

(2) σ^2未知时，μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right);$$

(3) σ^2的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right);$$

σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\ S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}\ S}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right).$$

38.2 典型题解析

【例 38-1】 已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu, 1)$，从中随机抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40(cm)，则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是________.

[**注**：标准正态分布的函数值 $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$]

分析 本题是在方差已知时，正态总体的数学期望的区间估计，可按照公式计算.

由于在方差 $\sigma^2=1$ 时，正态总体的数学期望 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

其中，$\bar{x}=40$，$\sigma=1$，$n=16$，$\alpha=1-0.95=0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，所以，所求的置信区间为$\left(40-\frac{1}{4}\times 1.96,\ 40+\frac{1}{4}\times 1.96\right)$，即(39.51, 40.49).

解 应填 (39.51, 40.49).

【例 38-2】 设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（单位：h）分别为

6.0， 5.7， 5.8， 6.5， 7.0， 6.3， 5.6， 6.1， 5.0，

该干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 在下列情形下，求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间：

（1）若由以往的经验知 $\sigma=0.6$（h）；（2）若 σ 未知.

分析 本题是在方差已知和未知两种情形下，求正态总体的数学期望的区间估计，可按照公式直接计算即可.

解（1）已知 $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，查表得 $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$，而 $\sigma=0.6$，$n=9$，$\bar{x}=6.0$，于是得 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

即 (6 ± 0.392)，也即 $(5.608, 6.392)$.

（2）已知 $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$. 查表得 $t_{0.025}(8)=2.3060$，而 $\bar{x}=6.0$，$s^2=0.33$，$s=0.5745$，$n=9$. 于是得 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right),$$

即 (6 ± 0.442)，也即 $(5.558, 6.442)$.

【例 38-3】 随机地取某种炮弹 9 发作试验，得炮口速度的样本标准差 $s=11$(m/s). 设炮口速度服从正态分布. 求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

分析 本题是求单个正态总体标准差的区间估计，可按照公式直接计算.

解 已知 $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$1-\frac{\alpha}{2}=0.975$，$n-1=8$，查表得 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(8)=17.535$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(8)=2.180$. 于是得标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\,s}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}\,s}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right),$$

即 $(7.4, 21.1)$.

39 估计量的评选标准

39.1 解题方法

评价一个估计量的好坏，只需按照通常的评选标准进行衡量，关键是掌握定义.

(1) 无偏性：若估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意 $\theta \in \Theta$，有 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的无偏估计量.

(2) 有效性：设 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，若对于任意 $\theta \in \Theta$，有 $D(\hat{\theta}_1) \leqslant D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

(3) 一致性（相合性）：设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量，若对于任意 $\theta \in \Theta$，当 $n \to +\infty$ 时，$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量（或相合估计量）.

39.2 典型题解析

【例 39-1】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$________.

分析 由条件 $E(\bar{X}+kS^2)=np^2$ 来确定 k 值.

设总体为 X，依题意，有 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$，而且 $E(\bar{X})=E(X)=np$，$E(S^2)=D(X)=np(1-p)$. 若 $\bar{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则应有

$$E(\bar{X}+kS^2)=E(\bar{X})+kE(S^2)=np+knp(1-p)=np+knp-knp^2=np^2,$$

故必 $k=-1$.

解 应填 -1.

【例 39-2】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，为使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计，则 C 取值________.

分析 由已知，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2 (i=1, 2, \cdots, n)$. 由题意，得

$$E\left[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=\sigma^2,$$

即

$$C\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=\sigma^2.$$

又由 $E(X_{i+1}-X_i)=0$ 及 X_i, X_{i+1} 相互独立，得

$$E(X_{i+1}-X_i)^2=D(X_{i+1}-X_i)=D(X_{i+1})+D(X_i)=2\sigma^2,$$

故 $C\sum_{i=1}^{n-1}2\sigma^2=\sigma^2$，从而 $C=\frac{1}{2(n-1)}$.

解 应填 $\frac{1}{2(n-1)}$.

【例 39-3】 设 X_1, X_2, X_3, X_4是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本，其中，θ 未知，设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4),$$

$$T_2=\frac{1}{5}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4),$$

$$T_3=\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4).$$

（1）指出 T_1, T_2, T_3中哪几个是 θ 的无偏估计量；

（2）在上述 θ 的无偏估计中，指出哪一个较为有效.

分析 本题只需按照无偏性和有效性的定义进行衡量即可，即分别计算出三个估计量的期望，等于 θ 者为无偏估计量；再计算无偏估计量的方差，方差小的更有效.

解 （1） $E(X_i)=\theta$, $D(X_i)=\theta^2$.

$$E(T_1)=E\left[\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)\right]=\frac{1}{6}(\theta+\theta)+\frac{1}{3}(\theta+\theta)=\theta,$$

$$E(T_2)=E\left[\frac{1}{5}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)\right]=\frac{1}{5}(\theta+2\theta+3\theta+4\theta)=2\theta,$$

$$E(T_3)=E\left[\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)\right]=\frac{1}{4}(\theta+\theta+\theta+\theta)=\theta.$$

故 T_1, T_3是 θ 的无偏估计量.

（2） $$D(T_1)=D\left[\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)\right]=\frac{1}{36}(\theta^2+\theta^2)+\frac{1}{9}(\theta^2+\theta^2)=\frac{5}{18}\theta^2,$$

$$D(T_3)=D\left[\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)\right]=\frac{1}{16}(\theta^2+\theta^2+\theta^2+\theta^2)=\frac{1}{4}\theta^2,$$

$D(T_3)<D(T_1)$，故 T_3较 T_1更有效.

【例 39-4】 设 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$是参数 θ 的两个相互独立的无偏估计量，已知 $D(\hat{\theta}_1)=3D(\hat{\theta}_2)$. 试确定常数 k_1, k_2，使得 $k_1\hat{\theta}_1+k_2\hat{\theta}_2$是 θ 的无偏估计量，并且使 $k_1\hat{\theta}_1+k_2\hat{\theta}_2$的方差最小.

分析 本题是个综合题目. 由题中的两个条件来确定其中的两个常数 k_1, k_2.

解 因为

$$E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta,\ E(k_1\hat{\theta}_1+k_2\hat{\theta}_2)=(k_1+k_2)\theta=\theta,$$

所以 $k_1+k_2=1$.

又因为

$$D(k_1\hat{\theta}_1+k_2\hat{\theta}_2)=k_1^2D(\hat{\theta}_1)+k_2^2D(\hat{\theta}_2)=(3k_1^2+k_2^2)D(\hat{\theta}_2),$$

所以，要此方差最小，只需 $3k_1^2+k_2^2$最小. 记 $F=3k_1^2+k_2^2$，因为 $k_1+k_2=1$，所以 $k_2=1-k_1$，从而 $F=3k_1^2+(1-k_1)^2=4k_1^2-2k_1+1$. 令 $F'_{k_1}=8k_1-2=0$，得 $k_1=\frac{1}{4}$, $k_2=\frac{3}{4}$. 即当 $k_1=\frac{1}{4}$, $k_2=\frac{3}{4}$时，F 值最小，即 $D(k_1\hat{\theta}_1+k_2\hat{\theta}_2)$最小.

【例 39-5】 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$ 其中，$\theta>0$ 是未知参

数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 记 $\hat{\theta}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有无偏性.

分析 利用分布函数的定义计算 $F(x)$ 和 $F_{\hat{\theta}}(x)$, 用 $E(\hat{\theta})=\theta$ 成立与否检验 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量.

解 (1)
$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{\theta}^{x} 2\mathrm{e}^{-2(t-\theta)}\,\mathrm{d}t, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta.\end{cases}$$

(2)
$$\begin{aligned}F_{\hat{\theta}}(x)&=P\{\hat{\theta}\leqslant x\}=P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\leqslant x\}\\&=1-P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}>x\}\\&=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}\\&=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta.\end{cases}\end{aligned}$$

(3) 由于 $\hat{\theta}$ 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}F_{\hat{\theta}}(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$ 所以
$$\begin{aligned}E(\hat{\theta})&=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\hat{\theta}}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty} x\cdot 2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\,\mathrm{d}x=-\int_{\theta}^{+\infty} x\cdot \mathrm{d}\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\\&=-\left[x\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\Big|_{\theta}^{+\infty}-\int_{\theta}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\,d\theta\right]=\theta-\frac{1}{2n}\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\Big|_{\theta}^{+\infty}\\&=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta,\end{aligned}$$

因此, $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量.

注 本题涉及独立同分布的随机变量的极值分布问题, 应记住相应的分布函数:

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, 分布函数均为 $F(x)$, 则

(1) $\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为 $[F(x)]^n$;

(2) $\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为 $1-[1-F(x)]^n$.

40 假设检验

40.1 解题方法

本部分重点掌握假设检验的基本思想和一般步骤. 假设检验的一般步骤如下：

（1）确定原假设 H_0 与备择假设 H_1；

（2）选择检验统计量 T，并在原假设 H_0 成立的条件下确定该统计量的分布；

（3）给定显著性水平 α 和样本容量 n，确定拒绝域；

（4）将样本值代入统计量，如果算得的值落入拒绝域，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

40.2 典型题解析

【例 40-1】 设某次考试学生的成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 名考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

附表　t 分布表　$P\{t(n)\leqslant t_p(n)\}=p$

n \ $t_p(n)$ \ p	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

分析　本题考查正态总体的方差未知时，均值在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下的假设检验，可用通常方法进行.

事实上，本题的附表已经给出了提示信息，即应用 t-检验：$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$.

解　$H_0:\mu=70$；　$H_1:\mu\neq 70$.

检验统计量
$$t=\frac{\bar{X}-70}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)\quad (H_0\text{为真时}).$$

拒绝域为
$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-70}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(35)=2.0301.$$

由 $n=36$，$\bar{x}=66.5$，$s=15$ 算得
$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-70}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\frac{66.5-70}{\frac{15}{\sqrt{36}}}\right|=1.4<2.0301.$$

所以接受假设 $H_0:\mu=70$. 即在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

注 关于假设检验的问题，要了解什么情况下对哪个参数检验、所用的何种统计量及其分布、拒绝域是什么. 一般地，根据所给的样本值，算出统计量的值，考查它是否落在拒绝域内即可. 这里值得注意的是，拒绝域中临界值的选取，要根据题中所给的分布表的具体情况来确定临界值. 要注意分位数的选取是双侧还是单侧.

【例 40-2】 某工厂生产的螺钉长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现从一批螺钉中随机地抽取 6 件，测得长度的平均值 $\bar{x} = 5.46$，标准差 $s = 0.0802$. 问是否可以认为该批螺钉的平均长度为 5.50，方差小于 0.09^2？($\alpha = 0.10$).

参考数据：$t_{0.05}(5) = 2.0150$，$t_{0.05}(6) = 1.9432$，$\chi^2_{0.90}(5) = 1.61$，$\chi^2_{0.90}(6) = 2.204$.

分析 本题考查正态总体的方差未知时，均值在显著性水平 $\alpha = 0.10$ 下的假设检验，可用 t-检验，而方差的检验则需用 χ^2-检验.

解 (1) $H_0: \mu = \mu_0 = 5.50$； $H_1: \mu \neq \mu_0$.

σ^2 未知，选取统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1).$$

H_0 的拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),$$

$$|t| = \left| \frac{5.46 - 5.50}{\frac{0.0802}{\sqrt{6}}} \right| = 1.2217.$$

因为 $1.2217 < 2.0802$，即 $|t| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，不在拒绝域内，所以接受 H_0，可以认为这批螺钉的平均长度为 5.50.

(2) $H_0: \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 = 0.09^2$； $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

μ 未知，选取统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1).$$

H_0 的拒绝域为

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1).$$

$$\chi^2 = \frac{5 \times 0.0802^2}{0.09^2} = 3.97,$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{0.90}(5) = 1.610.$$

因为 $3.97 > 1.610$，即 $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$. 不在拒绝域内，所以接受 H_0，可以认为这批螺钉长度的方差不小于 0.09^2.